

## ■1 群 (信号・システム) - 1 編 (情報理論)

---

# 11 章 多端子情報理論/ネットワーク符号化

### 【本章の構成】

本章では以下について解説する.

- 11-1 多端子情報源符号化
- 11-2 多端子通信路符号化
- 11-3 多端子における仮説検定符号化
- 11-4 フィードバック通信路符号化
- 11-5 ネットワーク符号化

■1 群-1 編-11 章

---

11-1 多端子情報源符号化

## ■1 群-1 編-11 章

## 11-2 多端子通信路符号化

(執筆者：小林欣吾) [〇〇〇〇年〇月 受領]

マルチユーザ情報理論の研究の出発は、やはりシャノンによってなされた。シャノンは一人の送信者、一人の受信者が雑音を被る通信路を通して誤りなく通信を達成できる通信速度（レート）の限界を通信路容量という形で決定したが、彼はまた電話のように送信者がまた受信者であるような通信路モデルについても考察を深めていた（11-2-1 項）。この問題では 2 つのレートを問題としていて、達成可能なレート対の最大の範囲（通信路容量域）を決定することが課題である。しかしながら、この通信路は見かけ以上に困難な問題を内蔵していることが判明したので、より単純な通信路の通信路容量域を決定する方向に研究が進められた。それは 1970 年代からの衛星通信時代にふさわしい幾多の斬新なアイデアを生むこととなった。始めにマルチアクセス通信路の通信路容量域が Ahlswede と Liao によって決定された。これを 11-2-2 項で解説する。次に、放送通信路に対して Cover と El Gamal が研究を推進し、通信速度ベクトルの現在でも最良の達成可能領域（内界）が Marton によって与えられた。これを 11-2-3 項で解説する。干渉通信路に対する最良の達成可能領域（内界）は Han と Kobayashi によって与えられ、11-2-4 項の話題とする。11-2-5 項では中継通信路について触れる。

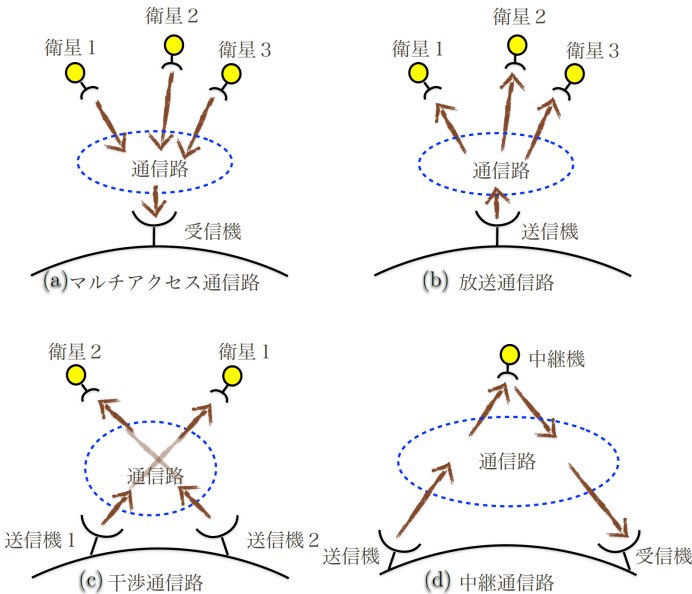


図 2・1 多入力多出力通信路

## 11-2-1 双方向通信路

シャノンの考えた双方向通信路のモデル<sup>1)</sup>は 2 入力  $x_1, x_2$ , 2 出力  $y_1, y_2$  の通信路  $W(y_1, y_2 | x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$  (図 2-2 参照) で、送信者であり受信者である 2 人が通信路

を挟んでそれぞれのメッセージ  $m_1, m_2$  を誤りなく相手に伝送しようとする。ここで問題は、 $n$  回通信路を使うとして、それぞれのメッセージの集合  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  とするとき、通信速度（レート） $(R_1, R_2) = \frac{1}{n}(\log |\mathcal{M}_1|, \log |\mathcal{M}_2|)$  を、符号器  $\varphi_1, \varphi_2$  と復号器  $\psi_1, \psi_2$  を上手に定めて、 $n$  を無限に大きくしたときにどれほどまで大きくできるかである。ここで「誤りなく」とは、 $n$  回の通信路を用いるときの平均誤り確率  $\bar{P}_e^{(n)} = \frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1 \in \mathcal{M}_1, m_2 \in \mathcal{M}_2} \Pr\{(\psi_1(Y_1^n), \psi_2(Y_2^n)) \neq (m_1, m_2)\}$  が  $n$  を無限に大きくするとき、 $\bar{P}_e^{(n)} \rightarrow 0$  とできることをいう。マルチューザ情報理論においては、ときに、最大誤り確率  $P_e^{(n)} = \max_{m_1 \in \mathcal{M}_1, m_2 \in \mathcal{M}_2} \Pr\{(\psi_1(Y_1^n), \psi_2(Y_2^n)) \neq (m_1, m_2)\}$  を問題とすることがある。誤り確率の基準を変えると容量域が変化する場合があるからである(11-2-2 項参照)。

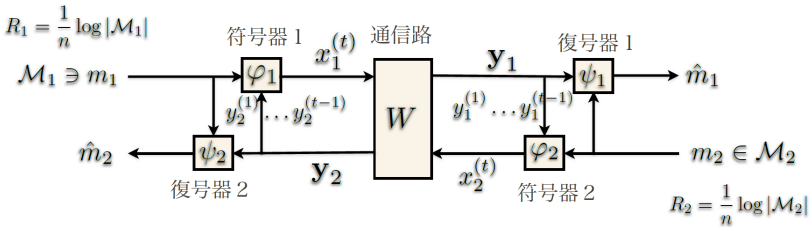


図 2・2 双方向通信路

いま、テスト入力確率分布を  $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$  とし、 $(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$  の同時分布を

$$p_{X_1 X_2 Y_1 Y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)W(y_1 y_2 | x_1 x_2)$$

として定めて、レート領域  $\mathcal{R}_S(X_1 X_2)$  を

$$\mathcal{R}_S(X_1 X_2) = \{(R_1, R_2) : R_1 \leq I(X_1; Y_1 | X_2), R_2 \leq I(X_2; Y_2 | X_1)\}$$

と定義する。ここで、 $I(X_1; Y_1 | X_2)$  などは条件付相互情報量である。双方向通信路の容量域  $C_{TWC}$  に対して、シャノンの内界として知られている領域は

$$C_{TWC} \supset \bigcup_{X_1, X_2: \text{独立}} \mathcal{R}_S(X_1 X_2) \text{ の凸閉包}$$

であり、シャノンの外界として知られている領域は

$$C_{TWC} \subset \bigcup_{X_1, X_2: \text{任意}} \mathcal{R}_S(X_1 X_2) \text{ の凸閉包}$$

である<sup>1)</sup>。一般には、この内界と外界は一致しないことが知られている。加法的 2 元対称双方向通信路、加法的ガウス双方向通信路の場合には容量域は矩形となり、2 つの古典的通信路が独立に利用されている場合と変わりはない。しかし、 $Y_1 = Y_2 = X_1 \otimes X_2$  という簡単な乗法的 2 元双方向通信路の場合ですら、まだ容量域は決定されていない。

さて、通信路  $W$  の  $n$  回使用に即して拡大通信路を  $W^n(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \prod_{i=1}^n W(y_{1i}, y_{2i} | x_{1i}, x_{2i})$

として定義し、それへの独立なテスト入力  $(X_1^n, X_2^n)$  を拡大通信路を  $W^n$  につないで得られる  $X_1^n, X_2^n, Y_1^n, Y_2^n$  を用いて

$$\begin{cases} R_1 & \leq \frac{1}{n} I(Y_1^n; X_1^n), \\ R_2 & \leq \frac{1}{n} I(Y_2^n; X_2^n) \end{cases}$$

を満たすレート対  $(R_1, R_2)$  の領域を  $\mathcal{R}_{\text{TWC}}(X_1^n, X_2^n)$  とすると、双方向通信路の容量域は  $C_{\text{TWC}}$

$$C_{\text{TWC}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{X_1^n \perp X_2^n} \mathcal{R}_{\text{TWC}}(X_1^n, X_2^n)$$

となっている<sup>4)</sup>。このような容量域の極限的表現は問題を解決したとはみなされない。我々が求められているのは Single Letterization と呼ばれる計算可能な有限の表現なのである。

### 11-2-2 マルチアクセス通信路

図 2・1(a) の状況を 2 入力  $x_1, x_2$ , 1 出力  $y$  の通信路  $W(y|x_1, x_2)$  として 図 2・3 のようにモデル化して、その通信路容量域を Ahlswede<sup>2)</sup> と Liao<sup>3)</sup> が次のように決定した。すなわち、独立なテスト入力  $(X_1, X_2)$  を用いて、

$$\begin{cases} R_1 & \leq I(X_1; Y|X_2), \\ R_2 & \leq I(X_2; Y|X_1), \\ R_1 + R_2 & \leq I(X_1 X_2; Y) \end{cases}$$

を満たすレート対  $(R_1, R_2)$  の集合を  $\mathcal{R}(X_1, X_2)$  とするとき、マルチアクセス通信路の通信路容量域  $C_{\text{MAC}}$  は

$$C_{\text{MAC}} = \bigcup_{X_1 \perp X_2} \mathcal{R}(X_1, X_2) \text{ の凸閉包}$$

として定まる。

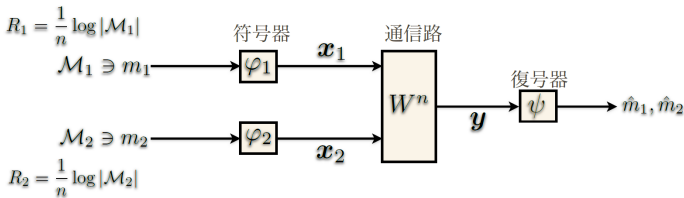


図 2・3 マルチアクセス通信路

この通信路の研究を通して、古典的な 1 入力 1 出力通信路ではフィードバックがあっても通信路容量は増加しないというよく知られた事実が、多端子通信路では成立しないことが判明した<sup>5)</sup>。すなわち、フィードバックのあるマルチアクセス通信路では通信路容量域が拡大することもある。また、やはり古典的な 1 入力 1 出力通信路では、復号誤りの基準が平均復号誤りであっても、最大復号誤りであっても通信路容量は増加しないのだが、多端子通信路では違いが生ずることもあるということが示された<sup>6)</sup>。

### 11-2-3 放送通信路

図 2・1(b)の状況を 1 入力  $x$ , 2 出力  $y_1, y_2$  の通信路  $W(y_1, y_2|x)$  として図 2・4 のようにモデル化して, その通信路容量域を求める問題はまだまだに完全な解決には至っていない. これまでに得られている内界で最大のものは Marton の結果<sup>7)</sup>である. すなわち, 通信路を  $n$  回用いて, 受信者 1 へ送る個別メッセージの集合を  $\mathcal{M}_1$ , 受信者 2 へ送る個別メッセージの集合を  $\mathcal{M}_2$ , 受信者 1 と受信者 2 へ送る共通メッセージの集合を  $\mathcal{M}_0$  とし, それらのレートを  $(R_1, R_2, R_0) = \frac{1}{n}(\log |\mathcal{M}_1|, \log |\mathcal{M}_1|, \log |\mathcal{M}_0|)$  とするとき, 確率分布  $p(u, v, w)$  と関数  $x(u, v, w)$  を用いて定まるテスト入力  $(X, U, V, W)$  を使って,

$$\begin{cases} R_0 + R_1 & \leq I(UW; Y_1), \\ R_0 + R_2 & \leq I(VW; Y_2), \\ R_0 + R_1 + R_2 & \leq I(UW; Y_1) + I(V; Y_2|W) - I(U; V|W), \\ R_0 + R_1 + R_2 & \leq I(VW; Y_2) + I(U; Y_1|W) - I(U; V|W), \\ 2R_0 + R_1 + R_2 & \leq I(UW; Y_1) + I(VW; Y_2) - I(U; V|W) \end{cases}$$

を満たすレートベクトル  $(R_1, R_2, R_0)$  の集合を  $\mathcal{R}_M(X, U, V, W)$  とすると, 放送通信路の通信路容量域  $C_{BC}$  は

$$C_{BC} \supset \bigcup_{XUVW} \mathcal{R}_M(X, U, V, W) \text{ の凸閉包}$$

を満たしている. ここで現れる補助変数  $U, V, W$  のとる値の集合  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$  の大きさは  $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{X}|, |\mathcal{V}| \leq |\mathcal{X}|, |\mathcal{W}| \leq |\mathcal{X}| + 4$  と制限しても構わない. すなわち, 右辺の Marton の領域は容量域  $C_{BC}$  の内界となっている. これが正しく容量域に一致しているかどうかは不明である.

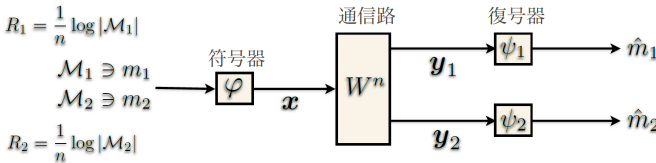


図 2・4 放送通信路

このように目的に応じて補助変数を導入していくというアイデアはマルチユーザ情報理論の鍵となる中心的なアイデアである. また, 一般の放送通信路の容量域を決定することは困難であったので, これまでその部分クラスに対する容量域の決定が数多くなされてきている.

### 11-2-4 干渉通信路

図 2・1(c)の状況を 2 入力  $x_1, x_2$ , 2 出力  $y_1, y_2$  の通信路  $W(y_1, y_2|x_1, x_2)$  として図 2・5 のようにモデル化して, その通信路容量域を求める問題はいまだに完全な解決には至っていない. 通信路だけを見れば双方向通信路と何ら変わらないが, ここには送信者・受信者の独立した 2 組が存在している. 送信された 2 つの信号が通信路を通過する過程で互いに影響を及ぼしあって

(干渉して) それぞれの受信者に受け取られるというモデルとなっている. これまでに得られている内界で最良のものは Han-Kobayashi の結果<sup>9)</sup>である.

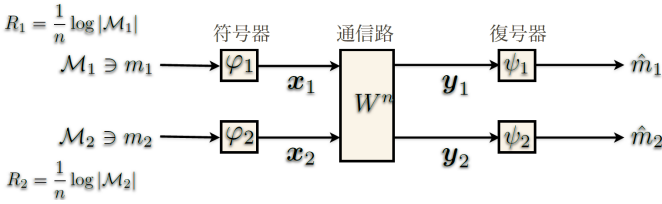


図 2・5 干渉通信路

すなわち, 重ね合わせ変数  $Q$  の条件付きで, 独立な補助変数  $U_1, W_1, U_2, W_2$  から関数  $f_1(u_1, w_1, q)$ ,  $f_2(u_2, w_2, q)$  を通して確率変数  $X_1 = f_1(U_1, W_1, Q)$ ,  $X_2 = f_2(U_2, W_2, Q)$  を用意して, それらを通信路  $W$  の入力として出力  $Y_1, Y_2$  を構成する (図 2・6 参照). これらの変数の組  $Z = QU_1W_1U_2W_2X_1X_2Y_1Y_2$  によって定まる 2 つのポリマトロイド

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \leq I(Y_1; U_1 | W_1 W_2 Q), \\ T_1 \leq I(Y_1; W_1 | U_1 W_2 Q), \\ T_2 \leq I(Y_1; W_2 | U_1 W_1 Q), \\ S_1 + T_1 \leq I(Y_1; U_1 W_1 | W_2 Q), \\ S_1 + T_2 \leq I(Y_1; U_1 W_2 | W_1 Q), \\ T_1 + T_2 \leq I(Y_1; W_1 W_2 | U_1 Q), \\ S_1 + T_1 + T_2 \leq I(Y_1; U_1 W_1 W_2 | Q) \end{array} \right.$$

と

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 \leq I(Y_2; U_2 | W_2 W_1 Q), \\ T_2 \leq I(Y_2; W_2 | U_2 W_1 Q), \\ T_1 \leq I(Y_2; W_1 | U_2 W_2 Q), \\ S_2 + T_2 \leq I(Y_2; U_2 W_2 | W_1 Q), \\ S_2 + T_1 \leq I(Y_2; U_2 W_1 | W_2 Q), \\ T_2 + T_1 \leq I(Y_2; W_2 W_1 | U_2 Q), \\ S_2 + T_2 + T_1 \leq I(Y_2; U_2 W_2 W_1 | Q) \end{array} \right.$$

の交わりとして表現される領域を  $S_{HK}(Z)$  とし,  $S_{HK}$  を  $\bigcup_{Z \in \mathcal{P}^*} S_{HK}(Z)$  の閉包とする. ここで,

$\mathcal{P}^*$  は上記のテスト入力  $Z$  の全体である.

ここで,  $S_1, S_2$  はそれぞれ送信者 1 から受信者 1 へ, 送信者 2 から受信者 2 へ送られる個別メッセージのレートであり,  $T_1, T_2$  はそれぞれ送信者 1 から受信者 1 と受信者 2 へ, 送信者 2 から受信者 1 と受信者 2 へ送られる共通メッセージのレートである.

最後に, Han-Kobayashi(HK-)領域  $\mathcal{R}_{HK}$  は 4 次元の領域  $S_{HK}$  を  $R_1 = S_1 + T_1$ ,  $R_2 = S_2 + T_2$  として 2 次元に射影して,

$$\mathcal{R}_{HK} = \{(R_1, R_2) : \text{ある } (S_1, T_1, S_2, T_2) \in S_{HK} \text{ に対して } R_1 = S_1 + T_1, R_2 = S_2 + T_2\}$$

として定義される．このHK-領域は一般の干渉通信路の内界をなしている．すなわち，干渉通信路の容量域 $C_{IC}$ に対して，

$$C_{IC} \supset \mathcal{R}_{HK}$$

が成立する．

HK-領域の定義にあたって重合せ変数 $Q$ が導入されているが，これを定数として定まる領域の合併を凸化した領域より，重合せ変数 $Q$ を入れて求められる領域の方が広くなるということに注目されたい．これをHan-Kobayashiのsuperposition codingと呼んでHK-領域の特徴的なところである．HK-領域はパワーコントロールを伴うTDMAなどの符号化で達成されるレート領域を凌いでいることも知られている．

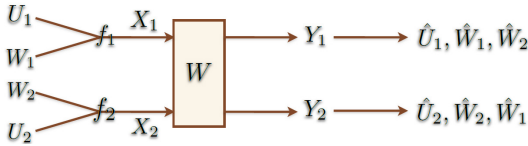


図 2・6 干渉通信路に対するテスト入力

最近，HK-領域の更に簡略な表現がChong, Motani, Gargによってなされた<sup>12)</sup>．彼らが定義した領域 $\mathcal{R}_{CMG}(Z)$ は，次の不等式系によって定義される．

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \leq I(Y_1; U_1 W_1 | W_2 Q), \\ R_2 \leq I(Y_2; U_2 W_2 | W_1 Q), \\ R_1 + R_2 \leq I(Y_1; U_1 | W_1 W_2 Q) + I(Y_2; U_2 W_2 W_1 | Q), \\ R_1 + R_2 \leq I(Y_2; U_2 | W_2 W_1 Q) + I(Y_1; U_1 W_1 W_2 | Q), \\ R_1 + R_2 \leq I(Y_1; U_1 W_2 | W_1 Q) + I(Y_2; U_2 W_1 | W_2 Q), \\ 2R_1 + R_2 \leq I(Y_1; U_1 | W_1 W_2 Q) + I(Y_1; U_1 W_1 W_2 | Q) + I(Y_2; U_2 W_1 | W_2 Q), \\ R_1 + 2R_2 \leq I(Y_2; U_2 | W_2 W_1 Q) + I(Y_2; U_2 W_2 W_1 | Q) + I(Y_1; U_1 W_2 | W_1 Q). \end{array} \right.$$

また，領域 $\mathcal{R}_{CMG}(Z)$ はレートに関する条件式が $\mathcal{R}_{HK}$ より少ないので，HK-領域を凌ぐのではないかという期待されたが，最終的に一致していることが示された．ここで使われた高次元の線形不等式系を低次元の線形不等式系に射影するFourier-Motzkinアルゴリズムは今日ではマルチユーザ情報理論の有用な基本的手法となっている．

干渉通信路の研究は当初，干渉が特に強い通信路では干渉が全くない通信路とみなせるなどという意外な現象で研究者を驚かせて，マルチユーザ情報理論への興味を沸き立たせていた．一般の干渉通信路に対する最良の内界はHK-領域であるのに対して，これまでに多くの研究者によって色々な外界が提案されている．また，干渉通信路を特殊なクラスに限定し，それらに対して通信路容量を決定するという成果も幾つか得られてきている．最近では干渉通信路の研究が深化してガウス干渉通信路への理解も深まり，HK-領域は最適とは言えないまでも準最適な符号化であることも示されてきている<sup>13)</sup>．また一方では，HK-領域はある特殊な干渉通信路で



は最適ではないということも示されるに至っている<sup>15)</sup>。干渉通信路の研究の歴史、概要、最近の成果に関しては韓・小林による解説<sup>16)</sup>が参考になるだろう。

### 11-2-5 中継通信路

中継機が存在して図 2・1(d)の状況を 2 入力  $x_1, x_2$ , 2 出力  $y_1, y_2$  の通信路  $W(y_1, y_2|x_1, x_2)$  として図 2・7 のようにモデル化される, ここで,  $X_1$  は送信者から通信路への入力, 中継機は時刻  $t$  において,  $Y_2^{(1)} \dots Y_2^{(t-1)}$  までの受信信号を利用して  $X_2^{(t)} = \varphi_2(Y_2^{(1)} \dots Y_2^{(t-1)})$  として通信路に入力する. 復号機は出力列  $Y_1^n$  を見て送られたメッセージを復号する. この通信路容量域を求める問題も未だに完全な解決には至っておらず, Cover と El Gamal による通信路容量の上界と下界が知られている<sup>8)</sup>. すなわち, 中継通信路の容量  $C_{RC}$  に対するカットセット上界は

$$C_{RC} \leq \max_{X_1, X_2: \text{任意}} \min \{I(Y_1; X_1, X_2), I(Y_1, Y_2; X_1|X_2)\}$$

として与えられ, Decode-forward 下界と呼ばれるものは

$$C_{RC} \geq \max_{X_1, X_2: \text{任意}} \min \{I(Y_1; X_1, X_2), I(Y_2; X_1|X_2)\}$$

として与えられる.

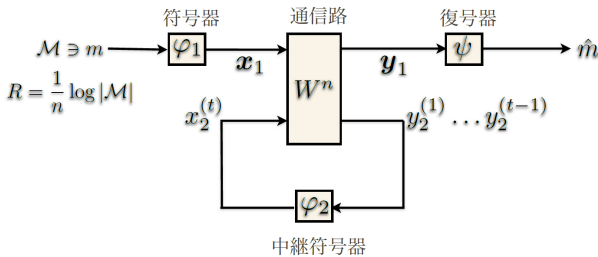


図 2・7 中継通信路

中継通信路の通信路容量を求める問題の困難さは, 通信路の中に内在する 1 時刻の遅れに存在することに起因している. いわば記憶のある通信路を相手にしているようなものなのである. 古典的通信路でもそれが記憶を持っている場合には一般的に通信路容量を決定することは極限的な表現を用いない限り困難なことが大半である.

### 11-2-6 おわりに

マルチユーザ情報理論を確実に習得するためには Csisár-Körner の著書<sup>10)</sup>は欠かせない. また, El Gamal-Kim の近著<sup>14)</sup>はマルチユーザ情報理論のこれまでの成果とその詳細, これからの展望を知るには格好の材料であろう. また, この理論の核心的アイデアをやさしく丁寧に記述している Cover-Thomas の著書<sup>11)</sup>の第 15 章ネットワーク情報理論は初学者にも大いに助けとなるだろう.

## ■参考文献

- 1) C.E. Shannon : “Two-way communication channels,” in Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob., vol.1, pp.611-644, 1961.
- 2) R. Ahlswede : “Multi-way communication channels,” in Proc. 2nd Int. Symp. Information Theory (Tsahkadsor, Armenian S.S.R.), pp.23-52, 1971 (Publishing House of the Hungarian Academy of Science, 1973).
- 3) H. Liao : “A coding theorem for multiple access communications,” presented at the Int. Symp. Inform. Theory, Asilomar, 1972. “Multiple access channels,” Ph.D dissertation, Univ. Hawaii, Honolulu, HI, 1972.
- 4) R. Ahlswede : “The capacity region of a channel with two senders and two receivers,” Ann. Probab., vol.2, pp.805-814, Oct. 1974.
- 5) N.T. Gaarder and J.K. Wolf : “The capacity region of a multiple access discrete memoryless channel can increase with feedback,” IEEE Trans. on Inform. Theory, IT-21, pp.100-102, 1975.
- 6) G. Dueck : “Maximal error capacity regions are smaller than average error capacity regions for multiuser channels,” Problems of Control and Information Theory, 7, pp.11-19, 1978.
- 7) K. Marton : “A coding theorem for the discrete memoryless broadcast channels,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-25, pp.306-311, May 1979.
- 8) T.M. Cover and A.El Gamal : “Capacity theorems for the relay channel,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-25, pp.572-584, 1979.
- 9) T.S. Han and K. Kobayashi : “A new achievable rate region for the interference channel,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-27, pp.49-60, Jan. 1981.
- 10) I. Csiszar and J. Körner : “Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems,” Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.
- 11) T.M. Cover and J.A. Thomas : “Elements of Information Theory, second edition,” JohnWiley and Sons, Inc., 2006 .
- 12) H-F. Chong, M. Motani, H.K. Garg, and H.El Gamal : “On the Han-Kobayashi Region for the Interference Channel,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol.54, no.7, pp.3188-3195, Jul. 2008.
- 13) R.H. Etkin, D.N.C. Tse, and H. Wang : “Gaussian interference channel capacity to within one bit,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol.54, no.12, pp.5534-5562, Dec. 2008.
- 14) A.El Gamal and Y-H. Kim : “Network Information Theory,” Cambridge University Press, 2011.
- 15) C. Nair, L. Xia, and M. Yazdanpanah : “Sub-optimality of Han-Kobayashi achievable region for interference channels,” submitted to IEEE ISIT 2015, 2015.
- 16) 韓 太舜, 小林欣吾 : “干渉通信路研究の潮流,” IEICE Fundamentals Review, vol.8, no.4, pp.229-243, 2015.

## ■1 群-1 編-11 章

---

### 11-3 多端子における仮説検定符号化

## ■1 群-1 編-11 章

---

### 11-4 フィードバック通信路符号化

■1 群-1 編-11 章

---

11-5 ネットワーク符号化