

1 群 (信号・システム) - 5 編 (信号理論)

4 章 スペクトル解析

(執筆者：和田成夫)[2011 年 2 月受領]

概要

確定的な信号とともに不規則信号の解析では、時間領域の特性と周波数領域の特性を把握することが重要となる。周波数に着目した信号解析がスペクトル解析であるが、代表的なものはフーリエ解析と相関関数を用いたパワースペクトル解析である。スペクトル解析は、対象とする信号（区間）が、定常性を有するか非定常的（時変スペクトル）かによって大きく方法が異なる。特に、非定常信号解析においては、スペクトルの定義自体が多様という難題に処する。また、アプローチの仕方は、変換を基にしたノンパラメトリック法と信号生成モデルに基づくパラメトリック法に分類される。

本章では、ディジタル的な処理を用いた、1 次元の定常及び非定常信号を対象としたスペクトル解析について述べる。また、非ガウス信号を対象とする高次スペクトル解析、多次元信号を対象としたスペクトル解析についても述べる。

【本章の構成】

本章の構成は以下のとおりである。

- 4-1 定常スペクトル解析
 - 4-1-1 相関関数とノンパラメトリック法
 - 4-1-2 窓関数を用いたスペクトル解析
 - 4-1-3 信号生成モデル（パラメトリック法）
 - 4-1-4 正弦波スペクトル解析
- 4-2 時変スペクトル解析
 - 4-2-1 短時間フーリエ解析
 - 4-2-2 時間 - 周波数分布
 - 4-2-3 時変スペクトルモデル
- 4-3 高次スペクトル解析
 - 4-3-1 高次キュムラント関数と非ガウス信号
 - 4-3-2 バイスペクトル解析
- 4-4 多次元スペクトル解析

1 群 - 5 編 - 4 章

4-1 定常スペクトル解析

4-1-1 相関関数とノンパラメトリック法

(執筆者：島村徹也)[2008年3月受領]

不規則信号を考える場合、それを確率的な法則に支配されながら時間変動する現象ととらえると分かりやすくなる。この現象を確率過程と呼ぶ。確率過程は、その統計的性質が時間と共に変化しない定常確率過程と、時間と共に変化する非定常確率過程に分類できる。このうち、定常確率過程は、更に強定常過程と弱定常過程とに分類される。強定常過程とは、確率過程の統計的性質が時間軸の原点の移動に対して独立であるものをいう。強定常過程は狭義の定常過程とも呼ばれる。一方、弱定常過程は、その平均値が一定、自己相関関数が、ラグのみに依存するものをいう。弱定常過程は広義の定常過程とも呼ばれる。一般に、強定常過程であれば、弱定常過程となる。

不規則信号を取り扱う場合、定常過程（特に弱定常過程）が考察対象としてしばしば取り上げられる。これは次の二つの理由による。

- 実際に多く見受けられ、比較的高い精度で近似表現が可能である。全時間区間において定常過程である必要はなく、興味が向けられる時間区間で定常過程であればよい。
- 一次統計量及び二次統計量を用いて、その性質をほとんど表せる。したがって、数学的取り扱いが容易である。

このような定常過程の性質により、これ以降は定常過程を前提に話を進めることにする。

確率過程の性質は集合平均、すなわち期待値によって把握できる。期待値演算子には記号 E が通常用いられる。

ある信号系列 $x(n)$ に対し、その集合平均

$$\mu = E[x(n)] \quad (4.1)$$

は、信号 $x(n)$ の平均値の真値、すなわち理論値を表す。したがって、 $x(n)$ の一部分である有限信号系列 $x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)$ から

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (4.2)$$

のように算出される平均値は、あくまで式 (4.1) の真値に対する推定値に過ぎない。同様に、信号系列 $x(n)$ の自己相関関数は

$$R_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \quad (4.3)$$

で定義され、信号系列 $x(n)$ と $y(n)$ の相互相関関数は

$$R_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)] \quad (4.4)$$

で定義される。

ここで、有限信号列 $x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)$ から

$$\hat{R}_{xx}(m) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m) & m \geq 0 \\ R_{xx}(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

のように算出される関数と式 (4.3) を考えると

$$E[\hat{R}_{xx}(m)] = (N - |m|)R_{xx}(m) \quad (4.6)$$

の関係式が成立する。すなわち、式 (4.5) で算出される自己相関関数は、期待値をとり、その特性の平均化を考慮したとしても、真の自己相関関数値の $N - |m|$ 倍となるわけである。したがって、算出値を $N - |m|$ で割り、 $\hat{R}_{xx}(m)/(N - |m|)$ とすることにより、真の自己相関関数の不偏推定値が得られるようになる。

自己相関関数の性質

ここで、式 (4.3) で定義される自己相関関数の性質を述べておく。

[性質 1] 自己相関関数 $R_{xx}(m)$ は、ラグ m に関して偶関数である。

$$R_{xx}(m) = R_{xx}(-m) \quad (4.7)$$

[性質 2] 自己相関関数 $R_{xx}(m)$ は、 $m = 0$ で最大値となる。

$$R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(m)| \quad (4.8)$$

上記の性質は、有限信号系列 $x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)$ からの不偏推定

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N - m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m) \quad m \geq 0 \quad (4.9)$$

を考えると理解しやすいかもしれない。

自己相関関数は、その名称のごとく、自己の信号の相関関係を表す。すなわち、ここでの場合、信号 $x(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ と信号 $x(n+m), n = 0, 1, \dots, N-m-1$ との積和を求め、その積の数で割り、平均化することで、信号 $x(n)$ と信号 $x(n+m)$ の類似性、すなわち相関量をその遅延量 m の関数として表現するものと解釈できる。したがって、直感的には、 $x(n)$ と $x(n+m)$ の波形が類似していれば、その m の値で大きな値をとり、類似していなければ、その m の値で小さな値をとることが分かる。 $x(n)$ の波形に対して最も類似している波形は $x(n)$ 自身である。 $x(n+m)$ の $m = 0$ 以外の場合であれば、多少なりとも $x(n)$ と類似しない箇所があると期待できるので、[性質 2] は理解できる。また、[性質 1] は、 $x(n)$ と $x(n+m)$ の順番を入れ替えることが $-m$ のラグを形成することに対応することに気づけば、容易に理解されよう。

パワースペクトル

信号系列が確定信号である場合、その離散時間フーリエ変換は周波数領域での重要な表現を与え、解析に役立つ。しかし、信号系列が不規則信号の場合、その直接的な離散時間フー

リエ変換はあまり意味をなさない。なぜなら、確率過程の一部のみを取り出し離散時間フーリエ変換したとしても、確率過程が有する不規則性が強調されるだけであるためである。確率過程は、本来期待値によって表現されるものである。したがって、確率過程とみなせる不規則信号の周波数解析は、期待値処理を介してなされるべきである。

信号系列 $x(n)$ が定常過程の場合、その性質は平均値と自己相関関数によって記述できることは先に述べた。定常過程の自己相関関数は、ラグを変数とする時間領域表現を与える。このとき、自己相関関数には不規則成分が含まれず、確定信号とみなすことができる。そこで、自己相関関数に離散時間フーリエ変換を施せば、周波数解析ができると考えられる。

今、正規化周波数 1 [Hz] でサンプリングされた、サンプリング間隔 1 [s] の信号系列 $x(n)$ の自己相関関数 $R_{xx}(m)$ が与えられるとする。ただし、 $x(n)$ の平均値は 0 と仮定する。このとき、 $R_{xx}(m)$ の離散時間フーリエ変換は次のように記述される。

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \quad (4 \cdot 10)$$

$S_{xx}(\omega)$ は信号系列 $x(n)$ のパワースペクトルと呼ばれる。パワースペクトルは、確定信号の離散時間フーリエ変換と同様、角周波数 ω または周波数 f に関して表される。

パワースペクトルは、物理的には信号系列のパワーの周波数上での分布を表す。これは、逆離散時間フーリエ変換して、パワースペクトルから自己相関関数に変換する式

$$R_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)e^{j\omega m} d\omega \quad (4 \cdot 11)$$

を考えるとわかりやすい。式 (4・11) で、 $m = 0$ とおくと、左辺は自乗平均値、すなわち平均パワー $E[x(n)^2]$ と等しくなるので、右辺と左辺は

$$E[x(n)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (4 \cdot 12)$$

の関係となる。この式 (4・12) は、 $x(n)$ の有するパワーを全角周波数域 $[-\pi, \pi]$ の成分に分解したとき、その成分が $[\omega, \omega + d\omega]$ の範囲に存在する量が $S_{xx}(\omega)/2\pi$ であることを意味している。 $S_{xx}(\omega)/2\pi$ はこのとき、ある微少な帯域幅での信号パワーに対応するため、パワースペクトル密度と呼ばれる。

式 (4・10)(4・11) の関係式は、ウイナー・ヒンチンの定理として知られている。これに基づき、自己相関関数とパワースペクトルが相互に変換される。

パワースペクトルの性質

ここでパワースペクトルの性質を述べておく。 $x(n)$ が実数からなる系列であれば、そのパワースペクトル $S_{xx}(\omega)$ には次のような性質がある。

[性質 1] パワースペクトル $S_{xx}(\omega)$ は実関数である。すなわち、虚数成分を含まない。この性質は、自己相関関数の [性質 1] より導かれる。式 (4・10) に $R_{xx}(-m) = R_{xx}(m)$ を適用し、変形すると

$$\begin{aligned}
 S_{xx}(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m)(\cos(\omega m) - j \sin(\omega m)) \\
 &= R_{xx}(0) + \sum_{m=-\infty}^{-1} R_{xx}(m)(\cos(\omega m) - j \sin(\omega m)) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{xx}(m)(\cos(\omega m) + j \sin(\omega m)) \\
 &= R_{xx}(0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} R_{xx}(m) \cos(\omega m) \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、パワースペクトルには虚数成分が含まれないことが分かる。

[性質 2] パワースペクトル $S_{xx}(\omega)$ は、角周波数・すなわち

$$S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega) \tag{4.14}$$

である。この性質は、上記の [性質 1] より明らかである。また、式 (4.14) を変形して

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m) \cos(\omega m) \tag{4.15}$$

としてもよい。式 (4.13)(4.15) のいずれにしても、 $R_{xx}(m)$ に含まれるコサイン成分のみが $S_{xx}(\omega)$ に表現されることになる。したがって、ここに $\omega = 0$ に関しての非対称性は存在しない。すなわち、 $\omega = 0$ に関して対称となる。

[性質 3] パワースペクトル $S_{xx}(\omega)$ は、非負である。すなわち

$$S_{xx}(\omega) \geq 0 \tag{4.16}$$

である。この性質は、不規則信号のフィルタリングとの関連から示されるが、ここでは詳細を省略する。興味ある読者は文献 4) などを参照されたい。

ある有限系列からそのパワースペクトルを推定する処理は、スペクトル解析あるいはスペクトル推定と呼ばれる。スペクトル解析は、雑音に埋もれた信号の抽出をはじめ、多くの応用を有する。

ノンパラメトリック法は、信号系列から直接的にパワースペクトルを求める方法である。ノンパラメトリック法は、古典的方法と呼ばれるときもある。

4-1-2 窓関数を用いたスペクトル解析

(1) 代表的なノンパラメトリック手法

ブラックマン・チュウキー法

有限信号系列 $x(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ が与えられたときのスペクトル推定問題を考えてみる。このとき、 $x(n)$ の自己相関関数を求める方法の一つは

$$\hat{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+\tau) \tag{4.17}$$

である。この自己相関関数の推定値を

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (4 \cdot 18)$$

のようにフーリエ変換することにより、パワースペクトルを推定することができると思われる。さて、ここでの自己相関関数の推定値 $\hat{r}_{xx}(\tau)$ の特性を考えてみる。与えられるデータは有限であり、それ以外のデータはすべて 0 であると仮定すると、実際の式 (4・17) の計算は

$$\hat{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-\tau-1} x(n)x(n+\tau), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4 \cdot 19)$$

である。また、対称性を利用して

$$\hat{r}_{xx}(-\tau) = \hat{r}_{xx}(\tau), \quad \tau = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4 \cdot 20)$$

となる。このとき、 $\tau = 0$ のときの自己相関関数の算出には N 個のデータを用いることができるが、 τ が 1 増加するにつれて積和する数一つずつ減少していき、 $\tau = N-1$ においては 1 回の積のみによって自己相関関数が算出されることになる。したがって、 τ が増大するにつれて、平均するデータが減少するために、結局推定される自己相関関数の信頼度が落ちてしまうことになる。そこで、

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \sum_{\tau=-M}^M w(\tau) \hat{r}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (4 \cdot 21)$$

のように自己相関関数に窓関数を掛け合わせ、大きい τ の値を有する自己相関関数の影響を取り除くことによって、パワースペクトルを推定する方法をとることが多い。このような式 (4・21) に基づくスペクトル推定法を一般にブラックマン・チューキー法 (Blackman-Tukey method) と呼ぶ。式 (4・21) の窓関数 $w(\tau)$ には、表 4・2 にある種々の窓関数を用いることが可能である。

ペリオドグラム

パワースペクトルを

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (4 \cdot 22)$$

のように考えてみる。ここで、 $r_{xx}(\tau)$ は離散時間 $\tau = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ で値を有する真の自己相関関数であり、 $S_{xx}(\omega)$ はそのフーリエ変換の真のパワースペクトルである。ここで、式 (4・22) を次のように変形してみる。

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\tau=-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|\tau|}{2M+1}\right) r_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{\tau=-2M}^{2M} (2M+1 - |\tau|) r_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} \end{aligned} \quad (4 \cdot 23)$$

表 4・1 窓関数

方形窓	$w(n) = \begin{cases} 1 & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$
パートレット窓	$w(n) = \begin{cases} 1 - \frac{ n }{M} & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$
ハニング窓	$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{M} & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$
ハミング窓	$w(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi n}{M} & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$
パルツェン窓	$w(n) = \begin{cases} 2(1 - \frac{ n }{M})^3 - (1 - 2\frac{ n }{M})^3 & n \leq \frac{M}{2} \\ 2(1 - \frac{ n }{M})^3 & \frac{M}{2} < n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$

そして、変数変換

$$\sum_{\tau=-2M}^{2M} (2M+1-|\tau|)r_{xx}(\tau) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-2M}^M r_{xx}(m-n) \quad (4 \cdot 24)$$

を施すと、 $S_{xx}(\omega)$ は

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-2M}^M r_{xx}(m-n)e^{-j\omega\tau} \quad (4 \cdot 25)$$

となる。また自己相関関数 $r_{xx}(\tau)$ を集合平均から求めるとすると、 $r_{xx}(\tau) = E[x(m)x(n)]$ と表記できるので、上式は

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \lim_{M \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M x(m)x(n)e^{-j\omega(m-n)} \right] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M x(m)e^{-j\omega m} \sum_{n=-M}^M x(n)e^{j\omega n} \right] \end{aligned} \quad (4 \cdot 26)$$

となる。このとき、 m を n と記しても結果は変わらないので、結局

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \right] \quad (4 \cdot 27)$$

となり、 $S_{xx}(\omega)$ は $x(n)$ のフーリエ変換を用いて求めることができるようになる。式 (4・27) は、結局、パワースペクトルの別表現を与えることになる。

ここで、有限信号系列 $x(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ のみが与えられる場合を考えてみる。このとき、集合平均を省略して式 (4・27) を利用すると、パワースペクトルの推定値は

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (4.28)$$

のように求められる．この式(4.28)に基づくスペクトル推定法はペリオドグラム(periodogram)と呼ばれる．

(2) 推定精度

ブラックマン・チューキー法とペリオドグラムは，フーリエ変換に基づく代表的な二つのスペクトル推定法である．次節で述べるパラメトリックなモデルに基づくスペクトル推定法をパラメトリック法と呼ぶのに対して，これらのフーリエ変換に基づくスペクトル推定法はノンパラメトリック法と呼ばれる．

スペクトル推定法は，その方法が与える推定の偏りと分散によって特徴づけられる．もし，推定偏りがなく，与えられるデータ数が増大するにつれて分散が0に収束するなら，一致推定と呼ばれる望ましい推定特性を有することになる．したがって，ここでは，ブラックマン・チューキー法とペリオドグラムの偏りと分散を比較してみることにする．

ブラックマン・チューキー法はペリオドグラムと密接な関連がある．それは，ブラックマン・チューキー法を導出する際の基本式である式(4.18)を考えてみれば明らかである．式(4.18)に式(4.17)を代入し，式(4.22)からのペリオドグラムの導出と同様の式展開をすることにより，

$$\begin{aligned} \hat{S}_{xx}(\omega) &= \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

が容易に導ける．すなわち，窓関数を $w(\tau) = 1$ ， $M = N - 1$ に設定するとき，ブラックマン・チューキー法とペリオドグラムは全く等しいことになる．したがって，ブラックマン・チューキー法はペリオドグラムを基本とするので，まずペリオドグラムの推定特性について考えてみることにする．

ペリオドグラムの偏り

式(3.7)で与えられる自己相関関数の集合平均は

$$E[\hat{r}_{xx}(\tau)] = \frac{N - |\tau|}{N} r_{xx}(\tau), \quad |\tau| \leq N - 1 \quad (4.30)$$

である．なぜなら，平均をとる数 N は固定であるのに積和する数が $N - |\tau|$ で減少するためである．したがって，ペリオドグラムの集合平均は，式(4.29)の関係式を利用して

$$\begin{aligned}
 E[\hat{S}_{xx}(\omega)] &= \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} E[\hat{r}_{xx}(\tau)]e^{-j\omega\tau} \\
 &= \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|\tau|}{N} r_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} \\
 &= F[w_B(\tau)r_{xx}(\tau)] \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} W_B(\omega-\xi)S_{xx}(\xi)d\xi \tag{4-31}
 \end{aligned}$$

と求められる。ここで、 F はフーリエ変換を意味している。また、 $w_B(\tau)$ はパートレット窓（三角窓と呼ばれることもある）に対応し、 $W_B(\omega)$ はそのフーリエ変換である。 $W_B(\omega)$ は

$$W_B(\omega) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2 \tag{4-32}$$

で与えられることが知られている。式 (4-31) は、ペリオドグラムの集合平均が、真のパワースペクトルをパートレット窓の周波数特性と畳み込む特性となることを示している。ゆえに、有限信号系列からのペリオドグラムによるスペクトル推定は、本質的に偏りがあることが分かる。しかし、もしデータ数が増大して $N \rightarrow \infty$ となれば、 $W_B(\omega)$ はディラックのデルタ関数 $\delta_{dirac}(\omega)$ に収束する。そして、等価的にパートレット窓は $w_B(\tau) = 1$ となる。このときペリオドグラムは不偏推定を与える。すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{S}_{xx}(\omega)] \rightarrow S_{xx}(\omega) \tag{4-33}$$

である。このようにデータ数の増大に伴い不偏推定となる場合、特に漸近的に不偏であるといわれる。

ブラックマン・チューキー法の偏り

一方、ブラックマン・チューキー法においては、ある窓関数と自己相関関数の積のフーリエ変換とみなすことができるので、推定値は

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_{xx}(\omega) &= F[w(\tau)\hat{r}_{xx}(\tau)] \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega-\xi)\hat{S}_{xx}(\xi)d\xi \tag{4-34}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、その集合平均は

$$E[\hat{S}_{xx}(\omega)] = \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega-\xi)E[\hat{S}_{xx}(\xi)]d\xi \tag{4-35}$$

である。ここで $N \rightarrow \infty$ を仮定すれば、ペリオドグラムが漸近的に不偏推定となる式 (4-33) の性質を利用して

$$E[\hat{S}_{xx}(\omega)] = \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega-\xi)S_{xx}(\xi)d\xi \tag{4-36}$$

となる。したがって、ブラックマン・チューキー法においては、推定値の集合平均が、真の

パワースペクトルをある窓関数の周波数特性で畳み込む特性となる。これは、一般的に不偏推定ではない。

ペリオドグラムとブラックマン・チューキー法の分散

分散に関しては、その導出に複雑な計算を要する。しかし、その結果だけ記しておくことにすると、ペリオドグラムでは

$$\text{var}[\hat{S}_{PE}(\omega)] = S_{xx}(\omega)^2 \left(1 + \left(\frac{\sin(\omega N)}{N \sin \omega} \right)^2 \right) \quad (4\cdot37)$$

ブラックマン・チューキー法においては、

$$\text{var}[\hat{S}_{BT}(\omega)] = \frac{S_{xx}(\omega)^2}{N} \sum_{\tau=-M}^M w(\tau) \quad (4\cdot38)$$

となることが知られている。ここでは、記述をより明確にする目的で、ペリオドグラムによる推定値は $\hat{S}_{PE}(\omega)$ 、ブラックマン・チューキー法による推定値は $\hat{S}_{BT}(\omega)$ と記してある。式(4・38)より、ブラックマン・チューキー法による分散は、データ数が増大するにつれて低減されることが分かる。しかし、ペリオドグラムの分散、式(4・37)はほとんど低減されない。ペリオドグラムの特徴

ペリオドグラムによる分散、式(4・37)は、 ω , 0, $\pm\pi$ において近似的に

$$\text{var}[\hat{S}_{PE}(\omega)] \approx S_{xx}(\omega)^2 \quad (4\cdot39)$$

である。これは、各周波数における標準偏差（分散の平方根）が、推定値の平均値、すなわち真のパワースペクトルの大きさとほぼ等しいことを意味している。このような状況において、確からしい推定結果は期待できない。

実際にスペクトル推定問題の対象となる信号の多くは周期性を有する。元来、ペリオドグラムは、雑音に埋もれた周期（隠れ周期）を推定するために考案された方法である。しかしこのような目的において、特に、対象の信号が白色雑音に埋もれた複素正弦波信号である場合、ペリオドグラムは最適な周波数推定値を与えることが知られている。また、対象信号が二つの正弦波信号からなる場合、それらの周波数差 Δf が与えられるデータ数 N に対して

$$\Delta f \geq \frac{1}{N} \quad (4\cdot40)$$

であるとき、二つの正弦波信号の振幅が等しければ、それぞれの正弦波周波数をペリオドグラムは分離できることが分かっている。このような異なる周波数成分を分解する能力は、周波数分解能と呼ばれる。

ブラックマン・チューキー法の特徴

ペリオドグラムと異なり、ブラックマン・チューキー法における周波数分解能は、窓関数の長さ $2M+1$ によって決定される。具体的には、ブラックマン・チューキー法では

$$\Delta f \geq \frac{1}{M} \quad (4\cdot41)$$

であるとき、二つの異なる周波数成分が分解される。したがって、 M は大きい方が望ましい。このとき、式 (4.35) で与えられる偏りも、 $W(\omega)$ がディラックのデルタ関数に近づくため、低減されることになる。しかし一方で、式 (4.38) で与えられる分散は、 M が大きくなるにつれ、増大してしまう。したがって、ブラックマン・チューキー法の推定特性にはトレードオフが存在することになる。

偏りと分散の双方を適度に低減するために、ブラックマン・チューキー法では、窓関数の長さを与えられるデータ数との間で $M = N/5$ のように設定される場合が多い。

一方、式 (4.35) に再び着目すると、パワースペクトルの推定値がその本来の性質である $E[\hat{S}_{xx}(\omega)] \geq 0$ をすべての周波数で満足するためには、周波数特性が非負となる窓関数を用いる必要がある。表 4.2 の中でこの性質を有する窓関数は、パートレット窓とパルツェン窓のみである。

以上のように、ブラックマン・チューキー法においては窓関数の設定が推定特性を左右する。したがって、目的に応じ、適切な窓関数の使用が要求される。

実際に有限データにノンパラメトリック法を適用した結果を示しておく。ここでは、

$$x(n) = \sin(2\pi(0.15)n) + \sin(2\pi(0.20)n) + w(n) \quad (4.42)$$

のように与えられる二つの正弦波信号に白色雑音 $w(n)$ が付加された場合のデータを扱った。信号対雑音比が 5dB となるように、白色雑音の分散を固定し、乱数のシードを変化させ、データ長 $N = 20$ の独立したデータを 50 種類得たとして、それぞれにペリオドグラムとブラックマン・チューキー法を適用してみた。ただし、ブラックマン・チューキー法では窓関数に $M = N/5 = 4$ となるパートレット窓を適用した。図 4.1 はペリオドグラムの結果である。50 種類のデータからのスペクトル解析結果が重ねて示してある。

一方、図 4.2 がブラックマン・チューキー法の結果である。図 4.1 と図 4.2 を比較すると、隣接する二つの周波数成分をペリオドグラムはきれいに分離しているのに対し、ブラックマン・チューキー法ではそれができていないことが分かる。しかしながら、ブラックマン・チューキー法の推定分散は極めて小さく、パワースペクトルのダイナミックレンジで 3dB 程度の推定値の変動しか見られないが、ペリオドグラムは推定分散が大きく、パワースペクトルのダイナミックレンジで 20dB 以上あることも明らかである。これらは、上記の推定精度の記述にうまく合致している。

最後に本執筆において参考にした文献を以下にまとめておく。

参考文献

- 1) 中川正雄, 眞壁利明, “理工学基礎 確率過程,” 培風館, 1987.
- 2) 川嶋弘尚, 酒井英昭, “現代スペクトル解析,” 森北出版, 1989.
- 3) 高橋進一, 島村徹也, “一次元デジタル信号処理の基礎,” 培風館, 1991.
- 4) 池原雅章, 島村徹也, “MATLAB マルティメディア信号処理上 デジタル信号処理の基礎,” 培風館, 2004.
- 5) S.M. Kay, “Modern Spectral Estimation: Theory and Application,” Prentice Hall, 1988.
- 6) P. Stoica and R. Moses, “Introduction to Spectral Analysis,” Prentice Hall, 1997.

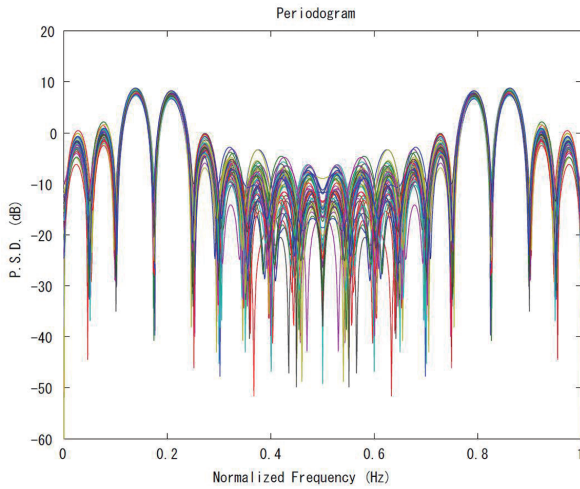


図 4.1 ペリオドグラムによるスペクトル解析結果

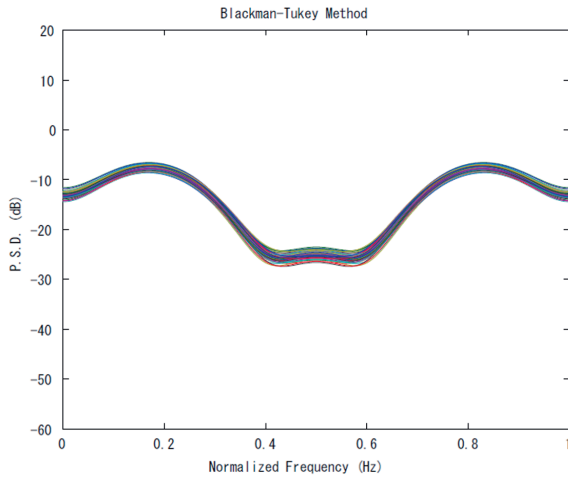


図 4.2 ブラックマン・チューキー法によるスペクトル解析結果

4-1-3 信号生成モデル (パラメトリック法) (執筆者: 佐野 昭) [2009 年 8 月 受領]

広義定常性を満たす離散時間信号列を考える。広義定常性とは、平均値が時間に依存しないこと、及び自己相関関数が時間差 (ラグ) にのみ依存することを満たす性質である。窓関数を利用したノンパラメトリックなスペクトル解析では、有限長の時間信号のフーリエ変換を利用するが、信号区間の外側ではゼロあるいは周期性を仮定している。信号モデルの事前情報を有効に利用することにより、少ないパラメータのモデル表現を介して高分解能なスペクトル推定が可能となる。代表的なパラメトリックなモデルとして、

- ① AR モデル (Autoregressive Model)
- ② MA モデル (Moving Average Model)
- ③ ARMA モデル (Autoregressive Moving Average Model)

がある。これらは白色雑音を入力とする入出力関係により以下のように表現される。

$$\text{AR: } x(t) = -\sum_{i=1}^p a_i x(t-i) + w(k), \text{ または } x(k) = \frac{1}{A(z)} w(k) \quad (4.43)$$

$$\text{MA: } x(k) = \sum_{i=0}^q b_i w(k-i), \text{ または } x(k) = B(z)w(k) \quad (4.44)$$

$$\text{ARMA: } x(k) = -\sum_{i=1}^p a_i x(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i w(k-i), \text{ または } x(k) = \frac{B(z)}{A(z)} w(k) \quad (4.45)$$

で表現される。ここで、 $w(k)$ は、 $E\{w(k)\} = 0$, $E\{w(k)w(\ell)\} = \sigma_w^2 \delta_{k\ell}$ を満たす白色雑音過程とする。伝達関数の分母及び分子要素を、以下のように定義する。

$$A(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i}, B(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i}, a_0 = b_0 = 1$$

まず、AR モデルに述べる。式 (4.43) は $x(k)$ を $x(k-1), \dots, x(k-p)$ の線形結合により予測するモデルであり、 $w(k)$ は線形予測誤差とみなせる。 $E\{w^2(k)\}$ を最小にする AR 係数 $\{a_i\}$ は

$$r_{xx}(\ell) + \sum_{i=1}^p a_i r_{xx}(\ell-i) = \begin{cases} \sigma_w^2 & : \ell = 0 \\ 0 & : \ell \neq 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

を満たす。ここで、 $r_{xx}(\ell)$ は $x(k)$ の自己相関関数 $r_{xx}(\ell) = E\{x(k)x(k+\ell)\}$ である。上式を $\ell \neq 0$ の場合について行列表現すると、次の Yule-Walker 方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \cdots & r_{xx}(-p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

有限個の時間信号 $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ を利用する場合には、自己相関関数 $r_{xx}(n)$ を

$$\hat{r}_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-n-1} x(t)x(t+n) \quad (4\cdot48)$$

により計算し, $r_{xx}(n)$ を $\hat{r}_{xx}(n)$ へ置き換えればよい.

自己相関関数が得られると, 式 (4\cdot47) の相関行列の逆行列を計算することにより, AR 係数が求められ, 更に, 式 (4\cdot46) の $\ell = 0$ の場合から σ_w^2 の推定値が得られる. これらを用いると, AR スペクトル密度は,

$$P_{AR}(f) = \frac{\sigma_w^2}{|1 + \sum_{i=1}^p a_i \exp(-j2\pi fi)|^2} \quad (4\cdot49)$$

により与えられる.

式 (4\cdot47) の逆行列の計算負荷は $O(p^3)$ のオーダーであり, これを $O(p^2)$ へ低減化する方法として, Levinson 法とそれに等価な Lattice 法が利用できる. Levinson 法は, $(m-1)$ 次の AR モデルの係数 $\{a_i^{(m-1)}\}$ から m 次の AR モデル係数 $\{a_i^{(m)}\}$ を次数方向に逐次的に計算する方法であり, 次式により反復的に求められる.

$$\kappa_m \equiv a_m^{(m)} = -\frac{1}{\rho_{m-1}} \left(r_{xx}(m) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i^{(m-1)} r_{xx}(m-i) \right) \quad (4\cdot50a)$$

$$a_i^{(m)} = a_i^{(m-1)} + \kappa_m a_{m-i}^{(m-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (4\cdot50b)$$

$$\rho_m = (1 - \kappa_m^2) \rho_{m-1} \quad (4\cdot50c)$$

初期条件を, $\kappa_1 = -r_{xx}(1)/r_{xx}(0)$, $\rho_1 = (1 - \kappa_1^2)r_{xx}(0)$ とおいた反復計算により AR 係数をオンラインで計算することができる.

一方, ラティス法では相関関数ではなく信号自体を用いて式 (4\cdot50a) の反射係数 $\{\kappa_m\}$ を求める点に特徴がある. m 次の AR モデルによる前向き予測誤差は

$$\begin{aligned} e_f^{(m)}(k) &= x(k) + \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} x(k-i) = x(k) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i^{(m)} x(k-i) + \kappa_m x(k-m) \\ &= x(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \left(a_i^{(m-1)} + \kappa_m a_{m-i}^{(m-1)} \right) x(k-i) + \kappa_m x(k-m) \quad (\because \text{式 (4}\cdot50b) \text{ より}) \\ &= \underbrace{x(k) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i^{(m-1)} x(k-i)}_{e_f^{(m-1)}(k)} + \kappa_m \underbrace{\left[x(k-m) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{m-i}^{(m-1)} x(k-i) \right]}_{e_b^{(m-1)}(k-1)} \end{aligned}$$

のように表せる. したがって, AR モデルの次数 $(m-1)$ と m に対応した各ステージでの前向き予測誤差と後向き予測誤差はそれぞれ,

$$e_f^{(m)}(k) = e_f^{(m-1)}(k) + \kappa_m e_b^{(m-1)}(k-1) \quad (4\cdot51a)$$

$$e_b^{(m)}(k) = e_b^{(m-1)}(k-1) + \kappa_m e_f^{(m-1)}(k) \quad (4\cdot51b)$$

で表現できる. ただし, $e_f^{(0)}(k) = e_b^{(0)}(k) = x(k)$ である. ステージ $(m-1)$ から m への推移は

ラティスフィルタの構造をしており、反射係数 κ_m を決定することが問題となる。反射係数 κ_m を $e_f^{(m-1)}(k)$ 及び $e_b^{(m-1)}(k-1)$ を用いて計算する方法には、Burg 法や Itakura 法などがある。Burg 法では、有限個のデータを用いた前向き及び後向き予測誤差の二乗累積和を最小にすることにより、反射係数は次式で与えられる。

$$\kappa_m = -\frac{2 \sum_{k=m}^{N-1} e_f^{(m-1)}(k) e_b^{(m-1)}(k-1)}{\sum_{k=m}^{N-1} [(e_f^{(m-1)}(k))^2 + (e_b^{(m-1)}(k-1))^2]} \quad (4.52)$$

相関関数を利用して求めた反射係数よりも信号を利用した式 (4.52) の反射係数から AR 係数を求める方が、パワースペクトルの分解能が優れていることが報告されている。

最後に AR スペクトルは、自己相関関数列 $\{r_0, r_1, \dots, r_p\}$ が与えられたとき、パワースペクトル密度 $S(f)$ に関するエントロピーを最大にするように相関関数を $\{r_0, r_1, \dots, r_p, r_{p+1}, r_{p+2}, \dots\}$ のように外挿する問題の解になっていることを付記しておく。

次に、ARMA モデルを考える。式 (4.43) 式の有理関数表現を IIR 表現で表すと、

$$x(k) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j} \right) w(k) = H(z^{-1})w(k) \quad (4.53)$$

となる。ここで、式 (4.45) の両辺に $x(k-n)$ を掛けて平均をとると、AR モデルの場合と同様な次式の拡張 Yule-Walker 方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(q) & r_{xx}(q-1) & \cdots & r_{xx}(q-p+1) \\ r_{xx}(q+1) & r_{xx}(q) & \cdots & r_{xx}(q-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(q+p-1) & r_{xx}(q+p-2) & \cdots & r_{xx}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(q+1) \\ r_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ r_{xx}(q+p) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

上式より、最小二乗法により AR 係数が求められる。行列が対称でないため、最小二乗法により求める方法、あるいは Yule-Walker 方程式の解法に類似した次数方向の反復アルゴリズムも利用できる。

一方、MA 係数は

$$r_{xx}(\ell) = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-k} b^*(j)b(j+\ell) \quad \text{for } \ell = 0, 1, \dots, q \quad (4.55)$$

を満たすが、 $\{r_{xx}(\ell)\}$ は MA 係数とは非線形関係にある。そこで、MA 係数を線形演算で求める方法として、まず、信号 $\{x(k)\}$ またはその相関関数より次数の高い AR モデル $1/C(z^{-1})$ を推定し、得られた AR 係数を c_0, c_1, \dots, c_L ($p \ll L < N-1$) とおく。一方、 $B(z^{-1})/A(z^{-1}) \approx 1/C(z^{-1})$ から各係数間に成り立つ関係式より

$$\begin{bmatrix} c_p & c_{p-1} & \cdots & c_{p-q+1} \\ c_{p+1} & c_p & \cdots & c_{p-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_L & c_{L-1} & \cdots & c_{L-q+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{p+1} \\ c_{p+2} \\ \vdots \\ c_L \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

が得られるので、上式より MA 係数の最小二乗推定値が得られる。この方法は、MA モデルのみの同定にも利用できる。

更に、ARMA モデルの同定精度を上げる手法として、三段解法がある。(a) まず同様に次数の高い AR モデル $1/C(z^{-1})$ を同定し、これから白色雑音 $w(k)$ の推定値 $\hat{w}(k)$ を

$$\hat{w}(k) = \sum_{i=0}^L c_i x(k-i) \quad (4.57)$$

により計算する。(b) 次にデータ $\{x(k), \hat{w}(k)\}$ を用いて $\{a_i, b_j\}$ を最小二乗法により推定し、得られた MA 係数をもつ MA 部分を分母にもつフィルタにそれぞれ $\hat{w}(k)$, $x(k)$ を通すことにより出力信号 $z(k)$, $y(k)$ を得る。(c) これらの信号を用いて ARMA 係数を再同定するという 3 回の最小二乗法による同定操作を介している。

ARMA 係数が求められると、パワースペクトル密度は

$$P_{ARMA}(f) = \frac{\sigma_w^2 |1 + \sum_{i=1}^q b_i \exp(j2\pi f i)|^2}{|1 + \sum_{i=1}^p a_i(j2\pi f i)|^2} \quad (4.58)$$

により表される。

最後にモデル次数 p, q の決定法として、次の AIC 規範が知られている。

$$AIC(i, j) = N\hat{\sigma}_w^2(i, j) + 2(i + j) \quad (4.59)$$

ここで、 i, j は AR 及び MA 部のモデル次数であり、 $\hat{\sigma}_w^2(i, j)$ は対応する $w(k)$ の分散の最尤推定値、 N は信号データ数を表す。AIC(i, j) を最小化をする i, j がそれぞれ AR 部と MA 部の次数推定値を与える。

4-1-4 正弦波スペクトル解析

(執筆者：佐野 昭) [2009 年 8 月受領]

信号生成モデルをパラメトリックモデルとみなすことにより、観測された時系列信号の相関行列から高分解能なスペクトル推定が可能となった。一方、信号が複数の正弦波信号の和とみなすことにより、その周波数推定からより分解能の高い推定を可能にする方法もよく利用される。これらの原理は、時間信号から周波数推定をするだけでなく、アレーアンテナにおける信号到来方向の推定にも適用できる。

次式で表される正弦波信号

$$x(k) = \sum_{i=1}^p A_i \exp(j2\pi f_i k + j\varphi_i) + w(k), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.60)$$

を考える。ここで、 $\{A_i, f_i, \varphi_i\}$ は i 番目の正弦波の振幅、周波数、位相を表し、これらは未知であり、推定すべきパラメータである。また、正弦波の個数 p は既知と仮定し、 $w(k)$ は平均値ゼロ、分散 σ_w^2 の複素正規性白色雑音過程とする。式 (4.60) を時刻方向にベクトル表現すると、

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \exp(j2\pi f_1) & \cdots & \exp(j2\pi f_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j2\pi f_1(N-1)) & \cdots & \exp(j2\pi f_p(N-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(N-1) \end{bmatrix}$$

となる。ここで $S = [s_1, s_2, \dots, s_p]$, $s_i = (1, \exp(j2\pi f_i), \dots, \exp(j2\pi f_i(N-1)))^T$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T$, $a_i = A_i \exp(j\varphi_i)$, $\mathbf{x} = (x(0), x(1), \dots, x(N-1))^T$, $\mathbf{w} = (w(0), w(1), \dots, w(N-1))^T$ とおくことにより, 上式は

$$\mathbf{x} = S\mathbf{a} + \mathbf{w} \quad (4.61)$$

と表現できる。 $w(k)$ は複素正規性白色過程なので, $\mathbf{x} - S\mathbf{a}$ は複素正規確率分布

$$p(\mathbf{x} - S\mathbf{a}) = \frac{1}{\pi^N \sigma_w^{2N}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_w^2} (\mathbf{x} - S\mathbf{a})^H (\mathbf{x} - S\mathbf{a})\right) \quad (4.62)$$

に従う。正弦波スペクトル解析は, この尤度を最大にする周波数 $\{f_i\}$ と複素振幅 $\{a_i\}$ の最尤推定値を求める非線形最適化問題として定式化できる。式 (4.62) の値を最大にするには

$$L(\mathbf{a}, f) = (\mathbf{x} - S\mathbf{a})^H (\mathbf{x} - S\mathbf{a}) \quad (4.63)$$

を最小化する複素振幅 \mathbf{a} を求めればよい。この最小二乗解は

$$\hat{\mathbf{a}} = [S^H S]^{-1} S^H \mathbf{x} \quad (4.64)$$

となり, 周波数推定値は, 式 (4.64) を式 (4.63) に代入した次式の最小化により求められる。

$$L(\hat{\mathbf{a}}, f) = \mathbf{x}^H \mathbf{x} - \mathbf{x}^H S [S^H S]^{-1} S^H \mathbf{x} \quad (4.65)$$

上式の周波数に関する最小化 (右辺第 2 項の最大化) は局所最適に陥ることが多い。これを避ける有力な方法として固有値分解に基づく部分空間法がある。

式 (4.60) の信号の自己相関関数は以下のように与えられる。

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{i=1}^p P_i \exp(j2\pi f_i \ell) + \sigma_w^2 \delta(\ell) \quad (4.66)$$

ここで, $P_i = A_i^2$ は i 番目の正弦波のパワーを表す。更に $M \times M (M > p)$ の相関行列は,

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^H\} = \sum_{i=1}^p P_i s_i s_i^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{ww} \quad (4.67)$$

となる。 \mathbf{R}_{ss} は信号相関行列であり, 上式よりランクは信号数 p である。一方, \mathbf{R}_{ww} は雑音相関行列であり, ランクは M である。したがって, \mathbf{R}_{ss} の固有値を $\{\lambda_i\}$ とすると, \mathbf{R}_{xx} の固有値分解は

$$\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \sigma_w^2) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{i=p+1}^M \sigma_w^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$$

と表現できる． $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p]$ の固有列ベクトルで張る信号部分空間と $\{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ で張る空間とは等価である．したがって，固有ベクトルの性質より，

$$s_i^H \sum_{j=p+1}^M \alpha_j \mathbf{u}_j = 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, p \quad (4.68)$$

がいえる．すなわち，雑音部分空間と信号部分空間とは直交する．

この性質を利用した特別な場合として，Pisarenko の方法 ($M = p + 1$ の場合) がある．式 (4.69) より， $s_i^H \mathbf{u}_{p+1} = 0$ がいえるので，

$$\sum_{n=0}^p (\mathbf{u}_{p+1})_{n+1} \exp(-j2\pi f_i n) = 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, p \quad (4.69)$$

が成立する．ここで， $(\mathbf{u}_{p+1})_{n+1}$ は，固有ベクトルの各要素を表す．したがって，

$$\sum_{n=0}^p (\mathbf{u}_{p+1})_{n+1} z^{-n} = 0 \quad (4.70)$$

の根は単位円上に存在するので，この方程式の根からその偏角 $2\pi f_i$ から周波数推定値 f_i が求められるが分解能はよくない．各周波数推定値に対応するパワーは，次の代数方程式

$$\begin{bmatrix} |s_1^H \mathbf{u}_1|^2 & |s_2^H \mathbf{u}_1|^2 & \cdots & |s_p^H \mathbf{u}_1|^2 \\ |s_1^H \mathbf{u}_2|^2 & |s_2^H \mathbf{u}_2|^2 & \cdots & |s_p^H \mathbf{u}_2|^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_1^H \mathbf{u}_p|^2 & |s_2^H \mathbf{u}_p|^2 & \cdots & |s_p^H \mathbf{u}_p|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_{p+1} \\ \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_{p+1} \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p+1} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

の解で与えられる． $\bar{\lambda}_i$ は， $(p+1) \times (p+1)$ の \mathbf{R}_{xx} の固有値であり， $\bar{\lambda}_{p+1} = \sigma_w^2$ である．

雑音部分空間と信号部分空間の直交性を一般的に利用した方法が MUSIC 法である．信号部分空間を張るベクトルと雑音部分空間を張るベクトルとの直交性より，

$$P_{\text{MUSIC}}(f) = \frac{1}{\sum_{i=p+1}^M |s^H(f) \mathbf{u}_i|^2} \quad (4.72)$$

により与える方法である．ここで， $s(f) = (1, \exp(j2\pi f), \dots, \exp(j2\pi f(M-1)))^T$ であり， f が複数个の正弦波周波数 $\{f_i\}$ と一致するところで $s^H(f_j) \mathbf{v}_i = 0$ となり，式 (4.72) のスペクトルがピークを示すことから周波数推定値が得られる．

次に，信号部分空間にのみ着目したアプローチをまとめておく．パワースペクトル密度が複数の周波数ピークをもつ信号は AR モデルで記述できることを述べたが，AR 係数は \mathbf{R}_{xx} の逆行列を求める最小二乗法により与えられた．しかしこの方法では，相関行列のサイズ M が大きくなると偽のピークが生ずることがある．これを防ぐには相関行列 \mathbf{R}_{xx} の固有値分解

を利用した主成分分析に基づく方法が有効である。

$$\mathbf{a}_{PC} = -\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xx} \cong \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{r}_{xx} \quad (4.73)$$

ここで、 p は小さな固有値を打切る閾値（信号部分空間の次数）である。

また、最小分散スペクトル推定法（Capon 法）に基づく AR 係数の計算法として

$$\mathbf{a}_{MV} = \frac{1}{\mathbf{s}^H(f) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{s}(f)} \quad (4.74)$$

が知られている。これは、出力ノルム $|\mathbf{a}^T \mathbf{x}(k)|^2$ を、拘束条件 $\mathbf{s}^H(f) \mathbf{a} = 1$ のもとで、最小化するという考え方から導出できる。上式に現れる逆行列にも主成分解析が適用できる。

最後に、信号部分空間法の代表的な手法である ESPRIT 法について述べる。二つの信号ベクトル、 $\mathbf{x}(k) = (x(k), \dots, x(k+m-1))^T$ 、 $\mathbf{y}(k) = (x(k+1), \dots, x(k+m))^T$ を定義すると、式 (4.61) から、両者には以下のような関係が成り立つことが分かる。

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{S} \mathbf{a} + \mathbf{w}(k), \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{S} \Phi \mathbf{a} + \mathbf{w}(k+1) \quad (4.75)$$

ここで、 $\Phi = \text{diag}[e^{j2\pi f_1}, \dots, e^{j2\pi f_p}]$ である。これまで述べた方法は、 \mathbf{S} に含まれる周波数情報を求める立場であったが、ESPRIT 法は $\{f_i\}$ を含む Φ から周波数を求める点に特徴がある。 $\mathbf{x}(k)$ と $\mathbf{y}(k)$ の相関行列を求めると、

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k)\} = \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} \quad (4.76a)$$

$$\mathbf{R}_{xy} = E\{\mathbf{x}(k) \mathbf{y}^H(k)\} = \mathbf{S} \mathbf{P} \Phi^H \mathbf{S}^H + \sigma_w^2 \mathbf{Z} \quad (4.76b)$$

となる。ここで、 $\mathbf{Z} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^H(k+1)\}$ であり、対角要素より一つ下の対角要素に 1 が並び（ほかの要素はゼロ）行列である。上の 2 式より

$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{R}_{xx} - \sigma_w^2 \mathbf{I} = \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^H$$

$$\mathbf{C}_{xy} = \mathbf{R}_{xy} - \sigma_w^2 \mathbf{Z} = \mathbf{S} \mathbf{P} \Phi^H \mathbf{S}^H$$

がいえるので、 Φ の定義から、ペンシル行列 $\mathbf{C}_{xx} - \xi \mathbf{C}_{xy} = \mathbf{S} \mathbf{P} (\mathbf{I} - \xi \Phi^H) \mathbf{S}^H$ がゼロとなるのは、 $\xi = \exp(j2\pi f_i)$ のときだけであることから、周波数推定値は $\mathbf{C}_{xx} - \xi \mathbf{C}_{xy}$ の一般化固有値の偏角から求められることが分かる。

ESPRIT 法には多くの方法が提案されているが、最小二乗法（または総最小二乗法）に基づく方法が有力である。前述したように、 \mathbf{R}_{xx} の信号部分空間 \mathbf{U}_s と \mathbf{S} が張る空間とは等価であり、両者には $\mathbf{U}_s = \mathbf{S} \mathbf{T}$ (\mathbf{T} は正則行列) の関係が成り立つ。また、式 (4.75) の関係を行列表現で示すと

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{S} \Phi = \mathbf{J}_2 \mathbf{S} \quad (4.77)$$

となる。ここで、 \mathbf{J}_1 は右側の行列の 1 行目から $(M-1)$ 行までを取り出す操作、 \mathbf{J}_2 は 2 行目から M 行までを取り出す操作を行う行列である。 \mathbf{S} と等価な \mathbf{U}_s に対しても同様な操

作を施して得られる行列を、それぞれ $E_x = J_1 U_s$, $E_y = J_2 U_s$ とおく。 S は未知であるが、 U_s は R_{xx} の固有値分解により入手可能な行列である。 E_x は $E_x = J_1 S T$ なのでこれより $J_1 S = E_x T^{-1}$ が得られる。一方、 E_y は $E_y = J_2 U_s = J_2 S T = J_1 S \Phi T$ となるので、 $E_y = J_2 U_s = J_2 S T = J_1 S \Phi T = E_x T^{-1} \Phi T$ が得られ、 S が消去できた。 Φ の固有値と $T^{-1} \Phi T \triangleq \Psi$ の固有値とは等しいことから、 $E_y = E_x \Psi$ を満たす Ψ を最小二乗法で求め、得られる Ψ の固有値の偏角から周波数推定値を求めることができる。

最後に、正弦波信号の個数判定法に触れておく。観測信号の尤度の計算より得られる

$$\text{AIC}(i) = 2N \ln \Sigma_i(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + 6i$$

を最小にする i が個数推定値となる。また、部分空間法に基づく方法の場合には、固有値の大きさにより判断する方法として、次式を最小にする i が個数推定値を与える。

$$\text{AIC}(i) = (M - i) \ln \left(\frac{\frac{1}{M-i} \sum_{j=i+1}^M \lambda_j}{\prod_{j=i+1}^M \lambda_j^{-(M-i)}} \right) + i(2M - i) \quad (4.78)$$

1 群 - 5 編 - 4 章

4-2 時変スペクトル解析

(執筆者：和田成夫)[2010年5月受領]

観測信号のスペクトルは時々刻々と変化することが多い。これを時変スペクトルというが、非定常信号の特徴の一つである。時変スペクトル信号の解析法は4-2-1節及び4-2-2節の変換に基づく方法と4-2-3節のモデル化に基づく方法に大別でき、多数存在する。

時変スペクトルの解析では、定常スペクトル解析法の直接的な適用では不適當である。例えばフーリエ変換をそのまま適用すると信号の全区間（積分範囲）でのフーリエスペクトルを求めることができるが、部分区間でのスペクトルは分からない。そのため短い区間での信号の局所的な変動をいわゆる周波数として表現することが必要になる。

まず、局所的な周波数を定義する方法として瞬時周波数

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg\{x(t)\} \quad (4.79)$$

を示す。瞬時周波数は三角関数の角度の微分になるのでいわゆる周波数定義の自然な拡張となる。観測信号（通常は実数値信号 $x_R(t)$ ）の瞬時周波数を得るためには、ヒルベルト変換を施した信号 $x_H(t)$ を虚数部とする解析信号

$$x(t) = x_R(t) + jx_H(t) \quad (4.80)$$

を用いる。

4-2-1 短時間フーリエ変換

(1) スペクトログラム

次に、局所的な周波数及びスペクトル成分を求めることに適する複素正弦波をもとにした短時間フーリエ変換（STFT）を示す。STFT は

$$X_w(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \tau)x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.81)$$

と表され、解析対象信号 $x(t)$ に窓関数と呼ばれる一定区間範囲に値をもつ信号 $w(t)$ を乗ずることで信号を切り出し、その区間を移動させながらフーリエ変換を行う。このため切り出された局所区間での周波数を反映するフーリエスペクトルとなる。

式(4.81)のパワースペクトル $|X_w(\omega, \tau)|^2$ はスペクトログラムと呼ばれている。スペクトログラムは時間と周波数の2変数を平面とした三次元パワースペクトル分布の変動表現であり、STFTによる信号の時間周波数分布（時間周波数表現）という。

STFTでは窓関数の時間域の形状、広がり、周波数減衰特性などがスペクトル解析の性能を決めるため、窓関数を選定するための注意が必要である。窓関数にガウス関数を用いた場合をガボール変換というが、ガウス関数は時間と周波数の広がり共に最も小さい。

(2) 分解能

時間周波数分布により、時変スペクトルを解析するときに重要な周波数と時間に関する分解能について述べる。周波数分解能とは、極めて近接した角周波数をもつ信号（例えば ω_0

[rad/s] と $\omega_0 + \Delta\omega$ [rad/s] の二つの正弦波) の周波数差を表現できる性能のことをいい、時間分解能とは極めて短い時間間隔で起こった信号の変化 (例えば変化時刻 t_0 [s] と $t_0 + \Delta t$ [s] に起こった二つの突発的な信号) を検出できる性能のことをいう。

STFT では窓関数で信号を切り出すため時間分解能は窓関数の拡がりに依存する。また、式 (4・81) を窓関数と信号のフーリエ変換を用いて表すと

$$X_w(\omega, \tau) = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega') W(\omega - \omega') e^{j\tau\omega'} d\omega' \quad (4 \cdot 82)$$

のように信号のスペクトルに窓関数のスペクトルを乗じて切り出すことになるので、スペクトルの拡がりが周波数分解能に關係する。

ここで信号の拡がり幅を

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |w(t)|^2 dt \quad (4 \cdot 83)$$

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |W(\omega)|^2 d\omega \quad (4 \cdot 84)$$

のように分散として表す。ただし、 $\langle t \rangle$ 、 $\langle \omega \rangle$ は $w(t)$ 及び $W(\omega)$ の平均 (中心) を表す。式 (4・83) 及び式 (4・84) には次式の不確定性原理の關係が成り立つ。

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (4 \cdot 85)$$

式 (4・85) は、時間領域での波形の拡がり と 周波数領域でのスペクトルの拡がりを共に小さくすることには限界があることを示す。スペクトル解析において周波数分解能をあげるためには、窓関数のスペクトルの分散が小さいことが必要となる。しかし、不確定性原理より窓関数の時間分散が大きくなるので、窓関数の切り出しにより時間変化を分離しにくくなり、時間分解能は低下する。以上のように STFT では周波数と時間の分解能を同時に上げることはできない。

スペクトル推定では必ずしも必要としないが、STFT の信号処理への応用などにおいては逆変換が有用である。STFT の逆変換は、逆フーリエ変換をもとにする

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} X_w(\omega, \tau) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4 \cdot 86)$$

と表される。ただし、 $w(0) \neq 0$ とする。なお、逆変換は式 (4・86) より一般的な積分変換を用いる形式が存在する。

(3) 離散時間信号の STFT

式 (4・81) は連続時間信号 $x(t)$ に対する連続時間 STFT であるが、離散時間信号 $x(n)$ に対する離散時間 STFT は離散時間フーリエ変換を用いて

$$X_w(\Omega, m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n-m)x(n)e^{-j\Omega n} \quad (4 \cdot 87)$$

と表される。なお、角周波数 Ω は連続量である。連続時間と同様にパワースペクトル $|X_w(\Omega, m)|^2$

は離散時間 STFT による時間-周波数分布となり、逆変換は逆離散時間フーリエ変換を用いることで

$$x(m) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\pi}^{+\pi} X_w(\Omega, m) e^{j\Omega m} d\Omega \quad (4\cdot88)$$

と表わされる。

ここで離散時間 STFT において特定の時刻 m におけるある角周波数 Ω_k のスペクトル成分に着目する。式 (4\cdot87) は、

$$X_w(\Omega_k, m) = h(n) * [x(n) e^{-j\Omega_k n}] \quad (4\cdot89)$$

と表せる。ただし、 $h(n) = w(-n)$ とおき、 $*$ は畳込み和演算を表す。式 (4\cdot89) から離散時間 STFT は、解析対象の信号を変調してインパルス応答が $h(n)$ のフィルタで処理することで得られる。図 4\cdot3 にブロック図を示す。

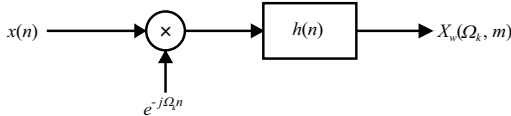


図 4\cdot3 離散時間 STFT の変調とフィルタによる処理

また、式 (4\cdot87) は、

$$X_w(\Omega_k, m) = e^{-j\Omega_k m} [x(n) * h(n) e^{j\Omega_k n}] \quad (4\cdot90)$$

とも表せる。これをブロック図で表すと図 4\cdot4 となる。この場合、離散時間 STFT は、解析対象信号をバンドパスフィルタ（インパルス応答 $h(n) e^{j\Omega_k n}$ ）でフィルタ処理をした後に変調することで得られることになる。

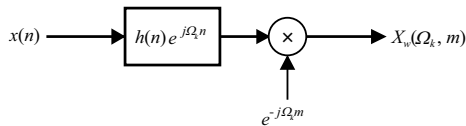


図 4\cdot4 離散時間 STFT のバンドパスフィルタと変調による処理

更に、角周波数 Ω の $0 \sim 2\pi$ 区間を K 等分した離散周波数点を $\Omega_k = 2\pi k/K$ ($k = 0, 1, \dots, K-1$) とすると、時間と周波数の両方を離散化した STFT となる。この変換は離散フーリエ変換 (DFT) を用いて周波数領域に変換可能であり、離散 STFT という。離散 STFT は、窓長 M の窓を移動しながら乗算して切り出した離散時間信号にサイズ K の DFT を施すので

$$X_w(k, m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(m-n)x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{K}}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (4\cdot91)$$

と表される。

図 4・5 に窓長 M , DFT のサイズ K の離散 STFT の処理の流れを示す。なお、窓関数の移動量は L と表している (式 (4・91) では $L = 1$ の場合となる)。

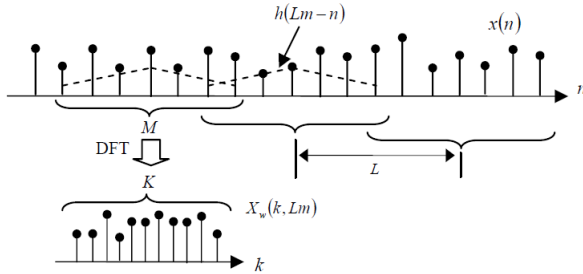


図 4・5 窓長, 移動量 (間引き率), DFT サイズの関係

(4) フィルタバンクによる実現

離散 STFT は離散時間フィルタバンクとのつながりが深い。窓関数の移動量を 1 サンプルではなく、 $L = M$ サンプル間隔単位で移動させると各切り出しの信号は時間領域で重なることはなく、

$$X_w(k, Mm) = e^{-j\frac{2\pi Mm}{K}} \left[\downarrow_M x(n) * h(n) e^{j\frac{2\pi kn}{K}} \right] \quad (4\cdot92)$$

と表される。ただし、 \downarrow_M は比率 M のダウンサンプリング処理となる。この場合図 4・3 及び図 4・4 の出力であるスペクトル成分にダウンサンプリング処理を施した分析フィルタバンクを用いたスペクトル解析の方法となる。窓関数が移動する量 (ダウンサンプリング比) が増えると切り出し区間の間隔が広がるので粗いスペクトル解析となるが演算回数は減らすことができる。

特に $L = M$ のときクリティカルサンプリング, $L < M$ のときオーバーサンプリング, $L > M$ のときアンダーサンプリングという。なお、フィルタバンクに基づくスペクトル解析では窓関数として IIR フィルタを用いることが可能となり、演算効率を向上させることができる。

次に、離散 STFT の逆変換について述べる。信号が完全に逆変換されることは再構成というが、 K 個の離散周波数点の値を処理して再構成する方法を示す。

まず、代表的な方法である窓関数 $h(n)$ (以後、分析窓という) のみを用いるフィルタバンク総和法 (FBS) と重複加算法 (OLA) に基づく方法を示す。

FBS では分析窓が

$$\sum_{k=0}^{K-1} H(\Omega - 2\pi k/K) = Kh(0) \quad (4\cdot93)$$

の条件を満たすと ($M = 1$ の場合),

$$\hat{x}(m) = \frac{1}{Kh(0)} \sum_{k=0}^{K-1} X_w(k, m) e^{j\frac{2\pi km}{K}} \quad (4\cdot94)$$

のようにスペクトル成分を変調して総和処理により再構成することができる.

また, OLA では分析窓の移動量を M としたとき,

$$\hat{x}(m) = \frac{M}{H(0)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} X_w(k, Mp) e^{j\frac{2\pi km}{K}} \quad (4\cdot95)$$

のように IDFT を用いることで合成できる. OLA では $M = 1$ を含めて

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(Mp - n) = \frac{H(0)}{M} \quad (4\cdot96)$$

の条件が分析窓に必要なになる.

これらの再構成法は, より一般的なかたちに拡張できる. 再構成の表現式は, 新たに合成窓関数 $g(n)$ を用いることで

$$\hat{x}(m) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g(m - Mp) X_w(k, Mp) e^{j\frac{2\pi km}{K}} \quad (4\cdot97)$$

と表される. 式 (4\cdot97) は一般化 FBS, または重み付き OLA という. なお, $g(m) = \delta(m)$ とすると FBS となり, $g(m) = 1/H(0)$ とすると OLA となる.

また, 式 (4\cdot97) をフィルタバンクとみなすと逆変換は分析フィルタバンクの逆の処理過程である合成フィルタバンクとなるので,

$$\hat{x}(m) = \sum_{k=0}^{K-1} e^{-j\frac{2\pi Mm}{K}} \left[X_w(k, Mn) * g(n) e^{j\frac{2\pi kn}{K}} \uparrow_M \right] \quad (4\cdot98)$$

と表される. ここで \uparrow_M は比率 M のアップサンプリング処理を表す. 一般化 FBS では再構成のためには窓関数 (フィルタ) に関して

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(n - Mm) h^*(Mm - n + sK) = \delta(s) \quad (4\cdot99)$$

が成立する必要がある.

フィルタバンクに基づく方法では, 特に $M = L$ のときに FFT とポリフェーズフィルタバンクを用いた演算上極めて効率的な実現方法が存在する.

4-2-2 時間 周波数分布

スペクトログラムをもとにして、より一般的なほかの時間-周波数表現について述べる。スペクトログラムは、式 (4・81) より

$$|X_W(\omega, \tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)x(t)e^{-j\omega t} dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{x_W, x_W}(u, \tau) e^{-j\omega u} du \quad (4 \cdot 100)$$

$$r_{x_W, x_W}(u, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)x(t)w^*(t-\tau-u)x^*(t-u) dt \quad (4 \cdot 101)$$

と変形でき、 $x(t)$ を移動窓関数 $w(t-\tau)$ で切り取った局所的信号 $x_W(t)$ の自己相関関数 $r_{x_W, x_W}(u, \tau)$ のフーリエ変換であることが分かる (ウィナー・ヒンチン定理)。なお、式 (4・100) 及び (4・101) は、定常信号の場合 (自己相関関数に窓関数を用いない式 (4・102) の場合) を局所化した時変パワースペクトルの表現となる。

また、自己相関関数を

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau) dt \quad (4 \cdot 102)$$

のように信号どうしの積の積分関数ではなく、 τ 離れた瞬時の積関数 (瞬時的な自己相関関数) を用いると式 (4・100) のウィナー・ヒンチン定理の関係は

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4 \cdot 103)$$

と表される。式 (4・103) の時間 周波数分布は、ウィグナー分布 (またはウィグナー・ヴァイル分布) という。フーリエ変換を用いて式 (4・103) を表すと

$$W_x(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right)X^*\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right)e^{j\xi t} d\xi \quad (4 \cdot 104)$$

となる。

ウィグナー分布は、以下の性質をもつ時間 周波数分布である。

- 1) $x(t) = 0 \quad t \notin (t_1, t_2)$ ならば $W_x(t, \omega) = 0 \quad t \notin (t_1, t_2)$, $X(\omega) = 0 \quad \omega \notin (\omega_1, \omega_2)$ ならば $W_x(t, \omega) = 0 \quad \omega \notin (\omega_1, \omega_2)$ を満たす分布となる。
- 2) $W_x^*(t, \omega) = W_x(t, \omega)$ を満たし常に実数値を有する。ただし、非正值をとることもある。
- 3) $W_x(t, \omega) = W_x(t, -\omega)$ を満たし周波数軸に対して対称性を有する。
- 4) 周辺条件である $\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2$, $\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2$ を満たす。また、信号の全エネルギーに関して $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \omega) d\omega dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$ を満たす。
- 5) 観測信号 $x(t)$ が時間及び周波数に関して $x(t-t_0)e^{j\omega_0 t}$ のように移動すると、 $W_x(t, \omega)$ も $W_x(t-t_0, \omega-\omega_0)$ と移動する (シフト不変)。
- 6) ウィグナー分布から元の信号への逆変換は、逆フーリエ変換を用いることで

$$x(t) = \frac{1}{2\pi x^*(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x\left(\frac{t}{2}, \omega\right) e^{j\omega t} d\omega \quad (4 \cdot 105)$$

と表される。

上記の性質は、時変パワースペクトルとして相応しい性質をほぼ満足している。しかし、ウィグナー分布の 2) の性質は望ましくない。そのほかにも正負の周波数成分をもつ実信号や二つの成分以上からなる信号では干渉項が生ずる問題点も知られている。ウィグナー分布を計算する際には、正負の周波数成分の干渉を起こさないよう解析対象信号を式 (4・80) で表される負の周波数成分をもたない解析信号に変換して用いる。

上述の問題を解決する時間 周波数分布として、窓関数 $h(\tau)$ を用いた次式で表される疑似ウィグナー分布

$$WPS_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4 \cdot 106)$$

が知られている。ただし、4) の周辺条件は満たさなくなる。

同様に、二次元のある時間 周波数関数 $\Phi(t, \omega)$ を用いてウィグナー分布を平滑化 (フィルタリング) した次式で表される平滑化ウィグナー分布も知られている。

$$S W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t - t', \omega - \omega') W_x(t', \omega') dt' d\omega' \quad (4 \cdot 107)$$

なお、スペクトログラムは、次式に示す窓関数のウィグナー分布を用いた平滑化ウィグナー分布と一致する。

$$|X_w(\omega, \tau)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t', \omega') W_w(t' - t, \omega' - \omega) dt' d\omega' \quad (4 \cdot 108)$$

一方、式 (4・103) のウィグナー分布と類似した定義式の曖昧度関数が知られている。

$$A_x(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\nu t} dt \quad (4 \cdot 109)$$

フーリエ変換を用いて式 (4・109) を表すと

$$A_x(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{j\tau\omega} d\omega \quad (4 \cdot 110)$$

となる。ウィグナー分布と同様に曖昧度関数は、式 (4・109) において $\nu = 0$ とおくと時間に関して、式 (4・110) において $\tau = 0$ とおくとそれぞれ自己相関関数と等価になる。ウィグナー分布と曖昧度関数は次式のように二次元フーリエ変換で関係づけられている。

$$A_x(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \omega) e^{-j(\nu t - \tau\omega)} dt d\omega \quad (4 \cdot 111)$$

離散時間信号に対するウィグナー分布は、スペクトログラムの場合と同じように次式に示す変換式が存在する。

$$W_x(m, \Omega) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m+n) x^*(m-n) e^{-j2\Omega n} \quad (4 \cdot 112)$$

次に、コーエンクラス (Cohen class) と呼ばれる次式で表される一般的な時間 周波数分布表現を示す。

$$S(t, \omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \phi(v, \tau) e^{-j(vt + \omega\tau - uv)} dv d\tau du \quad (4\cdot113)$$

ここで、 $\phi(v, \tau)$ は核関数と呼ばれ、核関数を適当に選ぶことで種々の時間 周波数分布となる。表 4・2 にコーエンクラスに含まれる時間 周波数分布名称とその核関数 (パラメータを含む) をまとめて示す。

表 4・2 コーエンクラスの時間 周波数分布と核関数

名 称	核関数 : $\phi(\theta, \tau)$
Wigner	$\phi(\theta, \tau) = 1$
Spectrogram	$W_w(t, \omega)$: 窓関数のウィグナー分布
Margenau-Hill	$\cos \frac{1}{2}\theta\tau$
Kirkwood , Rihaczek	$e^{j\theta\tau/2}$
Born-Jordan (Cohen)	$\sin \frac{1}{2}\theta\tau / \frac{1}{2}\theta\tau$
Page	$e^{j\theta \tau }$
Choi-Williams	$e^{-\theta^2\tau^2/\sigma}$
Zhao-Atlas-Marks	$g(\tau) \tau \frac{\sin a\theta\tau}{a\theta\tau}$

また、ウィグナー分布を

$$ASW_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{t' - t}{a}, a\omega\right) W_x(t', \omega') dt' d\omega' \quad (4\cdot114)$$

のようにアフィン平滑化する分布は、アフィン平滑化ウィグナー分布と呼ばれている。解析対象信号のウィグナー分布をウェーブレット関数のウィグナー分布でアフィン平滑化した時間-周波数分布 (厳密には時間 スケール分布) は、

$$\begin{aligned} |W_{x,\psi}(a, b)|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t', \omega') W_\psi\left(\frac{t' - b}{a}, a\omega\right) dt' d\omega' \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t - b}{a}\right) dt \right|^2 \end{aligned} \quad (4\cdot115)$$

と表され、ウェーブレット変換の絶対値の二乗となりスカログラムという。

スカログラムの時間分解能とスケール分解能 (周波数分解能) は、スペクトログラムと比べて図 4・6 に示す特徴がある。適用する窓関数とウェーブレット関数のスケールリングの違いから、スペクトログラムでは低周波数から高周波数すべての範囲において分解能は変わらない。しかし、スカログラムでは低周波数では周波数分解能は高く、高周波数では周波数分解能は低い (時間分解能が高い)。

式 (4・115) においてパラメータ a, b を離散化すると j, k に関する離散ウェーブレット変換のスカログラムとなる。離散化は $a = 2^{-j}, b = 2^{-j}k$ のように 2 のべき乗をもとに不等間隔で行われ、次式のように表される。

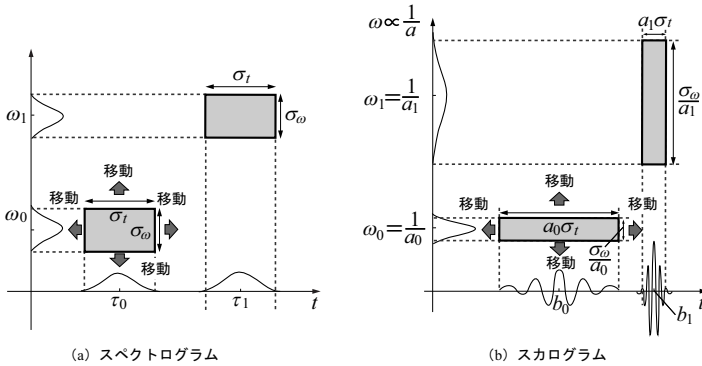


図 4-6 時間-周波数平面と時間 スケール平面での分解能の違い

$$|W_{x,\psi}(j, k)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) 2^{j/2} \Psi^*(2^j t - k) dt \right|^2 \quad (4-116)$$

更に、離散時間信号に対する離散時間ウェーブレット変換は、2分割フィルタバンクを枝状に構成することで実現できる。離散時間ウェーブレット変換の二乗は、時間 周波数平面上の離散点における時変スペクトル分布に対応する。

参考文献

- 1) Jont B. Allen and Lawrence R. Rabiner, "A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis," Proc. of the IEEE, vol.65, no.11, pp.1558-1564, 1977.
- 2) Michael R. Portnoff, "Time-Frequency Representation of Digital Signals and Systems Based on Short-Time Fourier Analysis," IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol.ASSP-28, no.1, pp.55-69, 1980.
- 3) T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner Distribution –A Tool for Time-Frequency Signal Analysis Part I: Continuous-Time Signals," Philips J. Res. 35, pp.217-250, 1980.
- 4) T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner Distribution –A Tool for Time-Frequency Signal Analysis Part II: Discrete-Time Signals," Philips J. Res. 35, pp.276-300, 1980.
- 5) T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner Distribution –A Tool for Time-Frequency Signal Analysis Part III: Relations with Other Time-Frequency Signal Transformations," Philips J. Res. 35, pp.372-389, 1980.
- 6) O. Rioul and P. Flandrin, "Time-Scale Energy Distributions: A General Class Extending Wavelet Transforms," IEEE Trans. on Signal Processing, vol.40, no.7, pp.1746-1757, 1992.
- 7) Boualem Boashash, "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal – Part 1: Fundamentals," Proc. of the IEEE, vol.80, no.4, pp.520-538, 1992.
- 8) Boualem Boashash, "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal – Part 2: Algorithm and Applications," Proc. of the IEEE, vol.80, no.4, pp.540-568, 1992.
- 9) F. Hlawatsch and G.F. Boudreaux-Bartels, "Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations," IEEE SP Magazine, pp.21-67, 1992.

- 10) R.E. Crochiere and L.R. Rabiner, "Multi-Rate Digital Signal Processing," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- 11) L. Cohen, "Time-Frequency Analysis," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1995. (吉川昭, 佐藤俊輔 訳, "時間 - 周波数解析", 朝倉書店, 1998.)
- 12) 和田成夫, "よくわかる信号処理 - フーリエ解析からウェーブレット変換まで -," 森北出版, 2009.

4-2-3 時変スペクトルモデル

(執筆者: 宮永喜一)[2009年3月受領]

(1) 時変のスペクトル表現

時変という意味は、時間とともにその性質が変化するものをいう。一方、スペクトルとは、素直に考えると定常信号の有する周波数空間上での特性、あるいは分布を意味する。つまり、時間とともに性質を変化させる信号のスペクトルには、明確な定義が与えられてはいない。それでは、「時変のスペクトル」とは何か、音声や音響などの一次元の信号に限って考えると、ある程度分類が可能である。

1. 信号の性質が緩やかに変化し、短い区間では定常な信号とみなすことができる場合。
2. 信号の性質が急激に変化し、短い区間でも定常とはみなせない場合。
 - (a) 信号の性質を表現する関数が連続的であるような場合。
 - (b) 信号の性質を表現する関数が不連続で、特徴が瞬間的に変化するような場合。

多くは、上記の Case 1 による仮定に基づいて推定が行われるが、Case 2(a) や (b) などの場合も観測される信号の中には現象として存在しており、時変スペクトルのモデル化が行われる。同時にそのモデル化を経て、時変スペクトルを推定する手法が提案されている。

(2) モデル化による時変スペクトル推定

一次元信号に対するモデル化による時変スペクトル推定法について紹介する。信号系列といっても、確率系列と確定系列があげられるが、その各々について時変な特性を考える必要がある。最も一般的に利用される時変スペクトルの表現手法は、基本的な性質をもつ定常信号(インパルス・調和関数などの確定信号、白色ランダム確率信号)を入力とみなして、伝達関数(あるいはモデル、フィルタとも呼ぶ)を通して出力信号を表現する時変系を考えることである¹⁾。

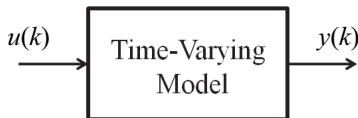


図 4-7 Time-Varying Model

図 4-7 にあるように、入力の $u(k)$ は、定常な信号で、スペクトルが全帯域で一定であると仮定する。この場合、その性質が分かりやすい白色のガウス分布などを仮定する。このモデ

ルが時間とともに変化するとして、モデルの出力信号が、今観測している時変な信号系列と仮定する。このとき、モデルのもつスペクトルが、時変スペクトルとなる。

例えばモデルを、自己回帰移動平均モデル (ARMA モデル)^{2,3,4,5)} とみなすと、次のように表現できる。

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i(k)y(k-i) + u(k) + \sum_{j=1}^m b_j(k)u(k-j) + w(k) \quad (4\cdot117)$$

ここで、 $a_i(k)$ と $b_j(k)$ の係数が時間の関数であり、この係数を求めると、モデルのスペクトルが計算できる。そのスペクトルが信号の性質を表現する時変スペクトルとみなすことができる。この式の中の $w(k)$ は、雑音成分である。多くは、白色雑音かパルス性の信号列と仮定される。

すべての $a_i(k)$ が、ゼロであれば、このモデルは、MA モデル (FIR フィルタ)^{6,7)} となり、インパルス応答系列により表現されるモデルとなる。一方、すべての $b_j(k)$ が、ゼロであれば、AR モデル (IIR フィルタ)^{8,9,10)} となり、最小位相でスペクトル上では共振特性を有する時変モデルとなる。観測信号から時変スペクトルを求める場合、AR モデルが扱いやすく、多くの応用では AR モデルの時変スペクトルが対象となっている。

前節の Case 1 の場合、短い時間の観測区間を考え、その区間内では、式 (4・117) の係数すべてが一定であるとみなせるので、時不変の係数推定問題となる^{8,9,11)}。その場合、最小二乗法や最大エントロピー法 (MEM)、最尤推定法 (MLM) などが適用できる。しかし、Case 2 では、短い区間内でも係数は一定とみなせない。Case 2(a) の場合には、式 (4・117) の係数変化は大きくない、この場合、推定アルゴリズムにおいて係数が徐々に変化するとして適応的に求めるか、時変係数の関数表現をより正確に定式化して、係数推定を行う手法がある。後者は、モデルの係数を一次近似¹⁴⁾する方法などが多い。Case 2(b) は、更に時変モデルを拡張し、その係数推定を行う必要がある。これについては、次節で述べる。

式 (4・117) の形式とは異なる表現、例えばカスケード型 AR モデル¹¹⁾、ARMA ラチスフィルタ^{12,13)} による時変モデルの表現も提案されている。更に、自動車制御などでは、モデルの内部状態も観測できる場合もあり、その際には次式のようなモデル化が行われる^{15,16,17)}。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{p}(k) + \mathbf{q}(k) \\ y(k) &= \mathbf{h}(k)^T \mathbf{p}(k) + w(k) \end{aligned} \quad (4\cdot118)$$

ここで、 $\mathbf{p}(k)$ は、時刻 k の係数ベクトル。 $\mathbf{h}(k)$ は、モデルの内部状態を表す観測値。 $\mathbf{A}(k)$ と $\mathbf{q}(k)$ は、係数が時間とともにどう変化するかを表現する係数変化行列・ベクトルである。この式は様々な表現を可能としており、式 (4・117) もこの形式に書くことができる。ただし、推定すべき量は、 $\mathbf{A}(k)$ と $\mathbf{q}(k)$ あるいは、 $\mathbf{p}(k)$ であるので、あまり複雑なモデル化をすると推定自体が不可能となる。

時変スペクトルをモデル化することで、そのスペクトル推定は、モデルの係数推定に帰着される。式 (4・117) のモデルで、係数が一次近似できた場合、一括処理的な方法で係数推定が実現できる。しかし多くの手法は、係数の変化に追従してゆく適応的手法が考えられている。適応的手法の場合、(M-1) LMS アルゴリズム^{6,7)}、(M-2) RLS アルゴリズム^{1,2,3,4)}、(M-3)

カルマンフィルタ^{5, 10)}の3種類とその拡張系が利用される。(M-1)は、リファレンスとなる信号と推定信号の差が小さくなるように係数を推定する。(M-2)は、観測信号と推定モデルによる評価関数を定義し、その評価関数が最適(多くは、観測信号と推定信号の差で定義される誤差の二乗が最小)となるように係数を推定する。(M-3)は、モデルを式(4・118)に変換して、その状態方程式に対してカルマンフィルタを適応する。

(3) モデル化の拡張

前節のモデル化では良好な表現ができない応用例もある。別のモデル化として、上記のモデル化を拡張した表現方法がある。例えば、周期的な観測時系列信号が、フーリエ級数表現できるように、時系列信号をある既定の関数の線形結合により表現し、その関数にかかる係数が時間とともに変化すると考える¹⁸⁾。

$$y(k) = \sum_{i=1}^s c_i(k) f(i, k) + w(k) \quad (4 \cdot 119)$$

$f(i, k)$ が、調和関数で表現されれば、離散フーリエ変換となるが、その場合でも、係数は $c_i(k)$ と表現されていて、時間の関数になる。ただし、この係数 $c_i(k)$ が任意である場合には推定する方法が難しく、多くは、係数 $c_i(k)$ を、線形近似・二次近似や、低次の調和関数で近似するなどが提案されている。更に $f(i, k)$ が、孤立波形で表現されれば、より表現できる時系列信号は広がるが、与える孤立波形が、応用上有効である必要がある。

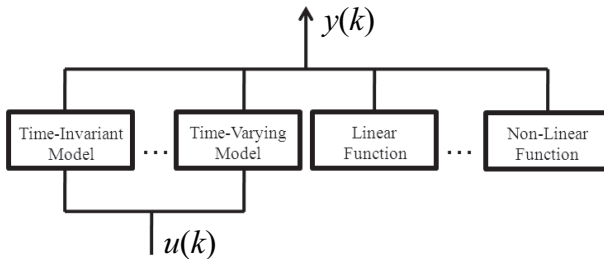


図 4・8 Time-Varying Model Network

式(4・119)を更に拡張した表現方法としては、Radial Base Function (RBF) を利用するなどのモデル化が提案されている^{19, 20, 21)}。

$$y(k) = \sum_{i=1}^s c_i(k) f(i, k) + \sum_{i=1}^l g_{i,k}(u(k)) + n(k) \quad (4 \cdot 120)$$

ここで、 $f(i, k)$ は式(4・119)と同じであるが、更に追加されている $g_{i,k}(u(k))$ が、RBFの基本関数である。

図 4・8 で示すように、複数の基本関数の合成でモデル化が実現されている。この基本関数

は、前節で利用したモデル（伝達関数）であったり、特定の非線形関数である．この表現方法の特徴は、ある特定の時間に観測された信号を、上記の RBF 基本関数のいくつかで表現し、その次の時間で観測された信号については、違う RBF 基本関数で表現するという考え方である．同様のモデル化として、パーシャル信号近似表現とも呼ばれる手法も提案されている²²⁾．式 (4-120) は、非線形関数が入っており、入力信号の大きさによってその特性自体も変化する．したがって、明示的にモデル全体の時変スペクトルを表現できない．ただし、時変信号を近似する能力を有し、特定入力に対するスペクトルを計算することができる．

(4) 応用に基づく時変スペクトルモデル

すべてを網羅してこの紙面で紹介することはできないが、定常なスペクトル推定とは異なり、定義が明確ではない“時変スペクトル”を推定するため、上記のモデル化を行って、信号の特徴をできるだけ正確に推定する試みは現在も行われている．応用に適したモデルの設計から始まる．そのため調べたい対象がどのようなものか、ある程度実験により調査し、有効なモデル化を考える．その後、最適な係数推定が実現されれば、利用価値の高い時変スペクトルが求められる．

参考文献

- 1) Yoshikazu Miyanaga, Eisuke Horita, Jun'ya Shimizu, Koji Tochinal, "Design of Time-Varying ARMA Models and Its Adaptive Identification," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E77-A, no.5, pp.760-770, May 1994.
- 2) Hiroyoshi Morikawa, "Adaptive estimation of time-varying model order in the ARMA speech analysis," IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol.38, no.7, pp.1073-1083, July 1990.
- 3) Yoshikazu Miyanaga, Nobuhiro Miki, Nobuo Nagai, Kozo Hatori, "A Speech Analysis Algorithm Which Eliminates the Influence of Pitch Using the Model Reference Adaptive System," IEEE Transaction on Acoustic, Speech and Signal Processing, vol.ASSP-30, no.1, pp.88-96, Feb. 1982.
- 4) Yoshikazu Miyanaga, Nobuhiro Miki, Nobuo Nagai, "Adaptive Identification of a Time-Varying ARMA Speech Model," IEEE Transaction on Acoustic, Speech and Signal Processing, vol.ASSP-34, no.3, pp.423-433, June 1986.
- 5) E.N. Demiris, S.D. Likothanassis, B.G. Konstadopoulou, D.G. Karelis, "Real time nonlinear ARMA model structure identification," IEEE Proceedings of 2002 14th International Conference on Digital Signal Processing, no.2, pp.869-872, July 2002.
- 6) Saeed Gazor, "Prediction in LMS-type adaptive algorithms for smoothly time varying environments," IEEE Transactions on Signal Processing, vol.47, no.6, pp.1735-1739, June 1999.
- 7) T. Naito, K. Hidaka, Xin Jingmin, H. Ohmori, and A. Sano, "Adaptive equalization based on internal model principle for time-varying fading channels," IEEE Proceedings of 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium, pp.363-368, Oct. 2000.
- 8) J.R. Bellegarda and D.C. Farden, "Time-varying modelling of arbitrary non-stationary signals," IEEE Proceedings of 1988 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.ICASSP-88, no.4, pp.2200-2203, April 1988.
- 9) M.K. Emresoy and A. El-Jaroudi, "Evolutionary Burg spectral estimation," IEEE Signal Processing Letters, vol.4, no.6, pp.173-175, June 1997.
- 10) M. Arnold, X.H.R. Milner, H. Witte, R. Bauer, C. Braun, "Adaptive AR modeling of nonstationary time series by means of Kalman filtering", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol.45, no.5, pp.553-562, May 1998.

- 11) A. Harma, M. Juntunen, "A method for parametrization of time-varying sounds," *IEEE Signal Processing Letters*, vol.9, no.5, pp.151-153, May 2002.
- 12) Yoshikazu Miyanaga, Nobuo Nagai, Nobuhiro Miki, "ARMA Digital Lattice Filter Based on New Criterion," *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, vol.CAS-34, no.6, pp.617-628, June 1987.
- 13) M. Haseyama, N. Nagai, and N. Miki, N., "An adaptive ARMA four-line lattice filter for spectral estimation with frequency weighting," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.41, no.6, pp.2193-2207, June 1993.
- 14) K.S. Nathan, H.F. Silverman, "Time-varying feature selection and classification of unvoiced stop consonants," *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol.2, no.3, pp.395-405, July 1994.
- 15) P. Falcone, M. Tufo, F. Borrelli, J. Asgari, H.E. Tseng, H.E., "A linear time varying model predictive control approach to the integrated vehicle dynamics control problem in autonomous systems," *IEEE Proceedings of 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.2980-2985, Dec. 2007.
- 16) J. Chauvin, G. Corde, P. Moulin, M. Castagne, N. Petit, P. Rouchon, "Real-time combustion torque estimation on a diesel engine test bench using an adaptive Fourier basis decomposition," *IEEE Proceedings of 2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, no.2, pp.1695-1702, Dec. 2004.
- 17) Junqing Wang and Tsu-Chin Tsao, "Laser Beam Raster Scan Under Variable Process Speed – An Application of Time Varying Model Reference Repetitive Control System," *IEEE Proceedings of 2005 International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, July 2005.
- 18) Yi-Teh Lee and H.F. Silverman, "On a general time-varying model for speech signals," *IEEE Proceedings of 1988 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988. vol.ICASSP-88, no.1, pp.95-98, April 1988.
- 19) Hideaki Imai, Yoshikazu Miyanaga, Koji Tochinal, "A Nonlinear Spectrum Estimation System Using RBF Network Modified for Signal Processing," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, vol.E80-A, no.8, pp.1460-1466, Aug 1997.
- 20) N.M. Haan, S.J. Godsill, "A time-varying model for DNA sequencing data," *IEEE Proceedings of the 11th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal Processing*, pp.245-248, Aug. 2001.
- 21) Hui Peng, H. Shioya, Xiaoyan Peng and K. Sato, "Nonlinear MPC based on the state-space form of RBF-ARX model," *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications*, no.2, pp.1679-1684, Sep. 2004.
- 22) C. Andrieu, M. Davy, A. Doucet, "Efficient particle filtering for jump Markov systems. Application to time-varying autoregressions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.51, no.7, pp.1762-1770, July 2003.

1 群 - 5 編 - 4 章

4-3 高次スペクトル解析

(執筆者: 戸田尚宏) [2010 年 7 月 受領]

前節までに見たように、パワースペクトル解析は不規則信号の特徴を記述するために極めて重要な役割を果たしている。しかし、パワースペクトルは、一つの確率変数の分布形状に関する特徴量として見た場合、二次の分散に相当し、その分布の広がりに関する情報しか提供しない。分布の非対称性や、裾野の広がり方といった分布形状に関するそのほかの細かな情報を得るためには更に高次の特徴量が必要になってくる。ガウス分布の場合、平均が 0 ならば、こうした高次の特徴量はすべて分散の関数として記述できてしまうので、分布の形状に関する特徴量としては分散のみで十分なのである。したがって対象がガウス信号の場合にはパワースペクトルで完全にその性質を論ずることができる。すなわち、パワースペクトルが等しいならば、それらの不規則信号の性質は同じであると結論できるのがガウス信号の特徴である。

しかし、実際の生体信号や物理、経済分野で得られる信号の中にはガウス性ではないものも存在する¹⁾。そうした非ガウス信号の場合、パワースペクトル解析は、まず信号の特徴を大まかに把握するうえで有益な情報を与えるが、それだけでは信号に含まれる規則性を十分にとらえてはいない。パワースペクトルにほとんど違いがないにもかかわらず、異なった性質を有している場合も存在し得る。

本節では対象となる信号を定常であるとしたうえで、非ガウス信号を記述するための特徴量として高次スペクトルに関して解説する。ガウス信号では三次以上の高次キュムラント関数がすべて 0 であるという著しい性質から、高次キュムラント関数の多次元フーリエ変換を用いて高次スペクトルが定義される。また高次スペクトルの内、三次の場合であるバイスペクトルについてその性質や推定法を概観する。

4-3-1 高次キュムラント関数と非ガウス信号

(1) 結合モーメント及び結合キュムラント

n 個の確率変数 x_1, x_2, \dots, x_n に対し、次数 $p = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ の結合モーメントは

$$\text{Mom}(x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}) = \mathbf{E}[x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}] \quad (4 \cdot 121)$$

と定義される。ここで $\mathbf{E}[\cdot]$ は期待値である。今 j を虚数単位とし、結合特性関数

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \mathbf{E}[\exp(j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n))] \quad (4 \cdot 122)$$

を定義した場合、結合モーメントは

$$\text{Mom}(x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}) = (-j)^p \frac{\partial^p \Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{m_1} \partial \omega_2^{m_2} \dots \partial \omega_n^{m_n}} \Bigg|_{\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0} \quad (4 \cdot 123)$$

とも表される。更に結合特性関数の自然対数をとったものを

$$\tilde{\Psi}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \ln(\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) \quad (4 \cdot 124)$$

とし、 p 次の結合キュムラントを

$$\text{Cum}(x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}) = (-j)^p \frac{\partial^p \widetilde{\Psi}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{m_1} \partial \omega_2^{m_2} \dots \partial \omega_n^{m_n}} \Bigg|_{\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0} \quad (4 \cdot 125)$$

と定義する .

(2) 定常信号のモーメント関数及びキュムラント関数

信号を各時刻 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ で一つずつ割り当てられた実確率変数 $x(k)$ であるとする . $x(k)$ が (強) 定常ならば , 任意の k に対し ,

$$\text{Mom}(x(k), x(k + \ell_1), \dots, x(k + \ell_{n-1})) = \text{Mom}(x(0), x(0 + \ell_1), \dots, x(0 + \ell_{n-1})) \quad (4 \cdot 126)$$

が成立する . そこで定常信号の n 次モーメント関数を

$${}^n\text{R}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-1}) = \text{Mom}(x(k), x(k + \ell_1), \dots, x(k + \ell_{n-1})) \quad (4 \cdot 127)$$

と定義する . 一次モーメント関数は常に定数であり ${}^1\text{R} = \mu = \mathbf{E}[x(k)]$ である . また n 次中心モーメント関数は

$${}^n\text{R}_c(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-1}) = \text{Mom}(x(k) - \mu, x(k + \ell_1) - \mu, \dots, x(k + \ell_{n-1}) - \mu) \quad (4 \cdot 128)$$

で定義される . 二次中心モーメント関数 ${}^2\text{R}_c(\ell)$ を $x(k)$ の自己相関関数と呼ぶ . 同様に n 次キュムラント関数を

$${}^n\text{C}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-1}) = \text{Cum}(x(k), x(k + \ell_1), \dots, x(k + \ell_{n-1})) \quad (4 \cdot 129)$$

と定義する .

キュムラント関数とモーメント関数の関係を二次と三次の場合に示せば

$$\text{二次} : {}^2\text{C}(\ell) = {}^2\text{R}(\ell) - \mu^2 = {}^2\text{R}_c(\ell) \quad (4 \cdot 130)$$

$$\begin{aligned} \text{三次} : {}^3\text{C}(\ell_1, \ell_2) &= {}^3\text{R}(\ell_1, \ell_2) - \mu({}^2\text{R}(\ell_1) + {}^2\text{R}(\ell_2) + {}^2\text{R}(\ell_2 - \ell_1)) + 2\mu^3 \\ &= {}^3\text{R}_c(\ell_1, \ell_2) \end{aligned} \quad (4 \cdot 131)$$

となる . 三次以下のキュムラント関数と中心モーメント関数は等しい . 特に , 平均値 $\mu = 0$ であれば , モーメント関数とも等しい .

定常信号のモーメント関数には種々の対称性がある . 二次モーメント関数では ,

$${}^2\text{R}(\ell) = {}^2\text{R}(-\ell), \quad (4 \cdot 132)$$

また , 三次モーメント関数においては ,

$${}^3\text{R}(\ell_1, \ell_2) = {}^3\text{R}(\ell_2, \ell_1) = {}^3\text{R}(-\ell_2, \ell_1 - \ell_2) = {}^3\text{R}(-\ell_1, \ell_2 - \ell_1) \quad (4 \cdot 133)$$

なる対称性があるため , $0 \leq \ell_2 \leq \ell_1$ の領域での値から全領域の値を知ることができる .

(3) 定常信号と高次スペクトル

定常信号の n 次キュムラント関数の $(n - 1)$ 次元離散的フーリエ変換が存在するならばそれを n 次スペクトルと呼ぶ^{1,2)} . すなわち ,

$${}^n S(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\ell_{n-1}=-\infty}^{\infty} {}^n C(\ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \exp(-j\omega_1 \ell_1 + \cdots + j\omega_{n-1} \ell_{n-1}), \quad -\pi \leq \omega_i \leq \pi \quad (4 \cdot 134)$$

である．二次スペクトル

$$P(\omega) = {}^2 S(\omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} {}^2 C(\ell) \exp(-j\omega \ell) \quad (4 \cdot 135)$$

がパワースペクトルである．一般に三次以上のキュムラント関数は高次キュムラント関数と呼ばれ，これに対応するスペクトルが高次スペクトルである．その中で三次のスペクトル ${}^3 S(\omega_1, \omega_2)$ を特にバイスペクトルと呼ぶ．三次以下のキュムラント関数は中心モーメント関数と等しいため，パワースペクトル及びバイスペクトルの定義は通常中心モーメント関数によって行われる．

高次スペクトルはパワースペクトルに比べて，一般に，その解釈は容易ではない．しかし，パワースペクトルでとらえ切れない信号の特徴が高次スペクトルに表れる可能性がある．

(4) ガウス信号と非ガウス信号

結合密度関数が次のかたちの正規分布で与えられるような信号を定常ガウス（正規）信号という．

$$f(x(k+\ell_1), \dots, x(k+\ell_n)) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Gamma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t \Gamma^{-1} \mathbf{x}\right) \quad (4 \cdot 136)$$

ここで k は任意であり， Γ は

$$\gamma_{ij} = {}^2 R_c(\ell_i - \ell_j) \quad (4 \cdot 137)$$

を要素としてもつ $n \times n$ の行列， \mathbf{x} はベクトル

$$\mathbf{x} = (x(\ell_1) - \mu, x(\ell_2) - \mu, \dots, x(\ell_n) - \mu)^t \quad (4 \cdot 138)$$

である．結合密度関数が式 (4・136) で表すことができない信号は非ガウス信号である．

ガウス信号の高次中心モーメント関数 ${}^n R_c(\ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ は二次中心モーメント関数を用いて

$${}^n R_c(\ell_1, \dots, \ell_{n-1}) = \begin{cases} 0 & ; n : \text{奇数} \\ \sum_{\text{all pairing } (i,m)} \prod {}^2 R_c(\ell_i - \ell_m) & ; n : \text{偶数} \end{cases} \quad (4 \cdot 139)$$

で与えられる³⁾．ここで積は， $(1, \dots, n)$ を $n/2$ 個の対 (i, m) に分割したものについて，和はそのような対分割のすべての組合せについてとることを意味する．したがって定常ガウス信号の場合，パワースペクトルを知ることができればその信号のすべての確率的構造を把握したことになる．

ガウス信号では偶数次の高次中心モーメント関数の値が 0 ではない．これに対し，キュムラントを用いるとガウス信号の場合，極めて顕著で重要な性質が導かれる．すなわち，ガウ

ス信号の三次以上のキュムラント関数はすべて 0 となる。

このことは逆にパイスペクトルをはじめとする高次スペクトルが 0 でない場合、非ガウス性であることを意味している。

分散が一定のもとでエントロピーが最大であるのはガウス分布である⁴⁾。このことは多変数の場合にも拡張され、パワースペクトルが固定されたもとでエントロピーを最大にするのはガウス信号であるということが出来る。すなわち、ガウス信号の場合はパワースペクトルが分かっただけでその情報源に関する知識はすべて得られたと考えることができるが、非ガウス信号の場合、同じパワースペクトルをもつガウス信号からのエントロピーの減少分にパワースペクトルではなくみ尽くせない知識が残っている。その情報を引き出すのが高次スペクトルである。

4-3-2 パイスペクトル解析

(1) パイスペクトルの定義と性質

パイスペクトルは高次スペクトルの三次の場合であり

$$B(\omega_1, \omega_2) = {}^3S(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell_2=-\infty}^{\infty} {}^3C(\ell_1, \ell_2) \exp(-j\omega_1\ell_1 + j\omega_2\ell_2) \quad (4\cdot140)$$

で定義されるが、式 (4\cdot131) で示したように三次キュムラント関数 ${}^3C(\ell_1, \ell_2)$ の代わりに三次中心モーメント関数 ${}^3R_c(\ell_1, \ell_2)$ を用いてよい。

ガウス信号においてはパイスペクトルは 0 である。以下、これ以外のパイスペクトルの性質について重要なものをあげる。

(a) パイスペクトルの対称性

パワースペクトルにおいて

$$P(\omega) = P(-\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (4\cdot141)$$

という対称性があったのと同様に、パイスペクトルでは

$$\begin{aligned} B(\omega_1, \omega_2) &= B(\omega_2, \omega_1) = B^*(-\omega_2, -\omega_1) \\ &= B(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) = B(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2), \quad 0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi \end{aligned} \quad (4\cdot142)$$

という対称性がある。このことから、 (ω_1, ω_2) は $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ の全領域で表示する必要はなく、 $(0 \leq \omega_1 \leq \omega_2, \omega_1 \geq 0.5\pi, \omega_2 \geq \pi - \omega_1)$ を満たす範囲で計算、及び表示を行えば十分である。ただし、連続信号をサンプリングした信号にあってはエリアシングのないことが条件である。エリアシングのある場合は特別な配慮が必要である¹⁾。

また、パイスペクトルはパワースペクトルと異なり複素数となるため、その振幅項 $|{}^3S(\omega_1, \omega_2)|$ のみを表示することが多い。

(b) 位相結合の検出

パイスペクトルは (ω_1, ω_2) の 2 変数関数であり、その値の解釈は困難であるが、位相結合に関しては比較的考えやすい。 θ_a, θ_b が独立で $[-\pi, \pi]$ の一様分布に従う確率変数であるとし、以下の信号を考える。

$$x(k) = \cos(\omega_a k + \theta_a) + \cos(\omega_b k + \theta_b) + \cos(\omega_c k + \theta_c), \quad (4 \cdot 143)$$

$$\omega_c = \omega_a + \omega_b$$

今 $\theta_c = \theta_a + \theta_b$ のとき, $x(k)$ のバースペクトルは

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} \pi^2 \delta(\omega_a - \omega_1) \delta(\omega_b - \omega_2), \quad \left(0 \leq \omega_1 \leq \omega_2, \omega_1 \leq \frac{\pi}{2}, \omega_2 \leq \pi \right) \quad (4 \cdot 144)$$

で与えられる¹⁾. すなわち, 三つ目の正弦波の周波数がほかの二つの正弦波の周波数の和であり, 位相も同様にほかの二つの和で与えられる場合, それら二つの正弦波周波数の格子点の一つのピークが存在する. 一方, θ_c が θ_a, θ_b とは独立で同じ一様分布に従う確率変数である場合バースペクトルは 0 である. これらのことからバースペクトルは二つの周波数の位相結合が和の周波数で現れる場合を検出できることが分かる.

(c) 線形フィルタの影響

バースペクトル $B_u(\omega_1, \omega_2)$ をもつ信号 $u(k)$ に対し, 伝達関数 $H(\omega)$ の線形フィルタをかけた場合, 出力 $x(k)$ のバースペクトル $B_x(\omega_1, \omega_2)$ は

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1 + \omega_2)B_u(\omega_1, \omega_2) \quad (4 \cdot 145)$$

で与えられる. ここで H^* は H の共役を表す.

(d) ガウス信号付加の影響

バースペクトル $B_u(\omega_1, \omega_2)$ をもつ信号 $u(k)$ とは独立なガウス信号 $g(k)$ が加え合わされた信号 $x(k) = u(k) + g(k)$ のバースペクトル $B_x(\omega_1, \omega_2)$ は $B_u(\omega_1, \omega_2)$ と等しい. これはガウス信号のバースペクトルが 0 であることによる.

(2) バイコヒーレンス

線形フィルタは不規則雑音のパワースペクトルを変化させるが, それに伴いバースペクトルも変化してしまうことが式 (4・145) から分かる. すなわちバースペクトルはパワースペクトルに依存する. パワースペクトルがガウス信号を特徴づける量であるならば, 非ガウス信号を特徴づけるバースペクトルにパワースペクトルの形状が影響を与えることは望ましくない. そこでバースペクトルをパワースペクトルで規格化したバイコヒーレンス

$$bic(\omega_1, \omega_2) = \frac{B(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt{P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_1 + \omega_2)}} \quad (4 \cdot 146)$$

が定義されている^{1,5)}. 式 (4・146) は複素数のままであるため非正規性を把握するため, 振幅の 2 乗としたうえで非正規性の検定などに用いられている^{6,7)}.

(3) バースペクトルの推定

L 点の信号 $x(k)$, $k = 0, 1, \dots, L-1$ を長さ N 点のセグメント M 個に分割し, 各セグメントの信号を $x_i(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ とする. $i = 1, 2, \dots, M$ はセグメント番号である. $W(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$ を適当な時間ウィンドウとし, 各セグメントの離散的フーリエ変換を

$$X_i(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k) (x_i(k) - \bar{\mu}) \exp(-j\omega k) \quad (4 \cdot 147)$$

とする. ここで

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \quad (4 \cdot 148)$$

である．パイスペクトルの推定値は

$$\widehat{B}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i(\omega_1) X_i(\omega_2) X_i^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (4 \cdot 149)$$

で与えられる．この方法は信号から直接推定するため直接法と呼ばれている．これとは別に，いったん三次中心モーメント関数を

$${}^3\widehat{R}_c(\ell_1, \ell_2) = \frac{1}{L} \sum_{0 \leq k, k+\ell_1, k+\ell_2 < L} (x(k) - \widehat{\mu})(x(k + \ell_1) - \widehat{\mu})(x(k + \ell_2) - \widehat{\mu}) \quad (4 \cdot 150)$$

で推定し，適当な二次元ウィンドウ $W(\ell_1, \ell_2)$ ， $(-K \leq \ell_1, \ell_2 \leq K)$ をかけたうえで二次元離散フーリエ変換してパイスペクトル

$$\widehat{B}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\ell_1=-K}^K \sum_{\ell_2=-K}^K W(\ell_1, \ell_2) {}^3\widehat{R}_c(\ell_1, \ell_2) \exp(-j(\omega_1 \ell_1 + \omega_2 \ell_2)) \quad (4 \cdot 151)$$

を推定する方法を間接法と呼ぶ．

これらとは別に時系列モデルを仮定したうえでパラメトリックにパイスペクトルを推定する試みもなされている．非ガウス白色雑音のパイスペクトルが定数であることと，式 (4-145) を利用し，非ガウス白色雑音により駆動される線形自己回帰モデルを信号に当てはめる方法⁸⁾，ガウス白色雑音により駆動される非線形自己回帰モデルによる方法⁹⁾，分布表現型の自己回帰モデルによる方法¹⁰⁾など，努力が続けられている．

バイコヒーレンスはパワースペクトルを

$$\widehat{P}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i(\omega) X_i^*(\omega) \quad (4 \cdot 152)$$

で推定し，式 (4-149) の $\widehat{B}(\omega_1, \omega_2)$ を用いて

$$\widehat{bic}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\widehat{B}(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt{\widehat{P}(\omega_1) \widehat{P}(\omega_2) \widehat{P}(\omega_1 + \omega_2)}} \quad (4 \cdot 153)$$

で推定することができる．しかしこの形式では上限の値が 1 を超える場合があるため，厳密に規格化を行った定義も提案されている^{11, 14)}．また，セグメント長を短くしてセグメント数を増やすと統計的な変動を抑えることができるが，バイアスの影響が大きくなり，場合によってはバイコヒーレンスの推定値を大きく歪ませてしまうことがある⁷⁾ので注意が必要である．

パイスペクトルの応用としてはこれまでプラズマなどの乱流^{11, 12)}，経済指標¹³⁾，音声信号解析¹⁴⁾，天体信号解析¹⁵⁾，回転機械の故障診断¹⁶⁾など多岐に渡るが，特に自発脳波の解析において 波の特徴解析は古くから行われている¹⁷⁾．また近年，手術中の麻酔の深度をパイスペクトルを用いることにより実時間でモニタリングする医療装置が開発され，実際に臨床で

用いられている¹⁸⁾。

参考文献

- 1) C.L. Nikias, A.P. Petropulu, "Higher-order spectra analysis," Prentice Hall, 1993.
- 2) D.R. Brillinger and M. Rosenblatt, "Asymptotic theory of estimation of k-th order spectra, Spectral Analysis of Time Series (Ed. by B. Harris), John Wiley & Sons, INC, pp.153-188, 1967.
- 3) 小倉久直, "物理・工学のための確率課程論," コロナ社, 1978.
- 4) 甘利俊一, "情報理論," ダイアモンド社, 1970.
- 5) 森下巖, 小畑秀文, "信号処理," 計測自動制御学会, 1982.
- 6) M.J. Hinich, "Tests for Gaussianity and linearity of a stationary timeseries," Journal of Timeseries Analysis, vol.3, no.3, pp.169-176, 1982.
- 7) 兼弘光明, 戸田尚宏, "バイコヒーレンス推定における決り問題と白色化による改善," 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J91-A, no.9, pp.861-868, 2008.
- 8) M.R. Raghuveer and C.L. Nikias, "Bispectrum estimation: a parametric approach," IEEE Trans. ASSP, vol.33, no.5, pp.1213-1230, 1985.
- 9) 戸田尚宏, 白井支朗, "階層型ニューラルネットワークに基づく非線形自己回帰モデルによる高次スペクトル推定," 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J79-A, no.6, pp.1212-1220, 1996.
- 10) 西口善朋, 戸田尚宏, 白井支朗, "サポートベクタ法を用いた分布表現型自己回帰モデルと高次スペクトル推定," 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J88-A, no.8, pp.974-982, 2005.
- 11) Y.C. Kim and E.J. Powers, "Digital Bispectral Analysis and Its Application to Nonlinear Wave Interactions," IEEE Trans. Plasma Science, vol.PS-7, no.2, pp.120-131, 1979.
- 12) 間瀬淳, "3. ゾーナルフローの最近の実験研究 3.1 動揺計測によるゾーナルフロー研究," Journal of Plasma and Fusion Research, vol.81, no.12, pp.978-982, 2005.
- 13) Tong H., "Non linear time series," Oxford Science Publications, 1990.
- 14) J.W.A. Fackrell, "Bispectral Analysis of Speech Signals," Ph.D Thesis, The University of Edinburgh, 1991.
- 15) A. Pillepich, C. Porciani and S. Matarrese, "The bispectrum of redshifted 21 centimeter fluctuations from the dark ages," The Astrophysical J., vol.662, pp.1-14, 2007.
- 16) D. Kocur and R. Stanko, "Order Bispectrum: A New Tool for Reciprocated Machine Condition Monitoring," Mechanical Systems and Signal Processing, vol.14, no.6, pp.871-890, 2000.
- 17) 館すずむ, 高谷治, "バイスペクトルによる 波波形の解析," ME 誌, vol.11, no.4, pp.284-292, 1973.
- 18) P.S. Glass, et.al., "Bispectral Analysis Measures Sedation and Memory Effects of Propofol, Midazolam, Isoflurane, and Alfentanil in Healthy Volunteers," Anesthesiology, vol.86, no.4, pp.836-847, 1997.