■1 群（信号・システム）－ 9 編（ディジタル信号処理）

1 章 ディジタル信号処理の基礎理論

（執筆者：越田俊介・川又政征）［2008 年 9 月 受領］

■概要■

ディジタル信号処理は，ディジタルシステムによって信号の分析・加工・変形などを行うための技術である．本章では，ディジタル信号処理技術の基礎理論として，離散時間信号及び離散時間システムに関する理論について述べる．これらの理論は，アナログ信号処理理論の基礎である連続時間信号及び連続時間システムの理論と密接に関係している．

【本章の構成】

本章では信号（1-1 節），標本化と量子化（1-2 節），離散時間フーリエ変換（1-3 節），z 変換（1-4 節），線形時不変システム（1-5 節），周波数応答と伝達関数（1-6 節）に関して述べる．

■1 群 - 9 編 - 1 章

1-1 信号

（執筆者：越田俊介・川又政征）［2008 年 9 月 受領］

信号は，何らかの情報を伝達する関数として定義される．例えば，人が発する音声は時間的に変化する空気の圧力の波であるから，音声信号は時間変数を用いた関数として表現され，伝達する情報は空気の圧力変化という物理量である．このほか，気温や湿度，体温，物価，株価，電圧，電流なども時間的に変化する物理量であり，これらはすべて信号と考えることができる．一方，写真や画像では，輝度（濃淡）が空間的に（平面上で）変化する．すなわち，写真や画像も信号の一種であり，これらは空間座標を用いた 2 変数関数として表現される．本章では，1 変数関数によって表現される信号，すなわち 1 次元信号を取り扱う．多次元信号に関しては 7 章を参照されたい．

前述の通り，1 次元信号は関数の形で数学的に表現されるが，図 1･1 のように時間変数 t が連続的である信号 $x(t)$ を連続時間信号という．連続時間信号のうち，振幅（関数値）$x(t)$ が連続的である信号をアナログ信号といい，振幅 $x(t)$ が離散的である信号を多値信号という．

一方，離散時間信号は図 1･2 のように離散的な時間軸上で定義され，離散的な時間間隔を T とすると，数列

$$\{\cdots, x(-2T), x(-T), x(0), x(T), x(2T), \cdots\} \tag{1･1}$$

で表される．離散時間信号の記述として，整数 n を用いた以下の表記がよく用いられる．

$$x(nT), \qquad -\infty \leq n \leq \infty \tag{1･2}$$

$$x(n), \qquad -\infty \leq n \leq \infty \tag{1･3}$$

$$x_n, \qquad -\infty \leq n \leq \infty \tag{1･4}$$

離散時間信号のうち，振幅が連続値である信号をサンプル値信号といい，振幅が離散値である信号をディジタル信号という．

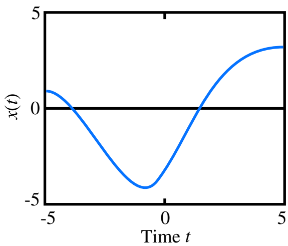

図 1･1　連続時間信号 $x(t)$

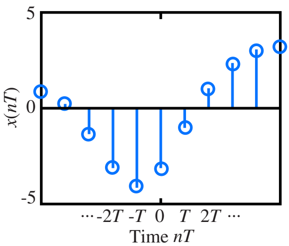

図 1･2　離散時間信号 $x(nT)$

■1 群 - 9 編 - 1 章

1-2 標本化と量子化

(執筆者：越田俊介・川又政征) [2008 年 9 月 受領]

1-2-1 標本化

離散時間信号は，連続時間信号を標本化することによって得られる．標本化の例を図 1･3 に示す．

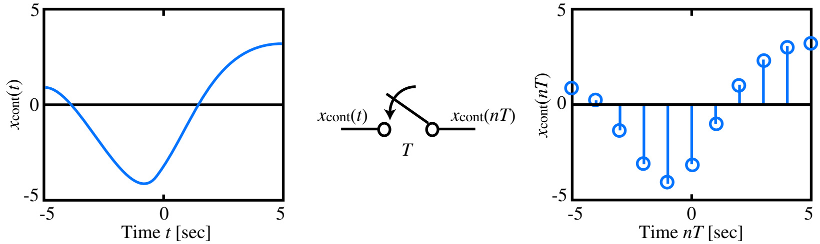

図 1･3　連続時間信号の標本化

ここでは，連続時間信号 $x_{\rm cont}(t)$ を一定の標本化周期 T[sec] で標本化している．これによって得られる離散時間信号を $x(n)$ とすると，$x(n)$ は以下のように記述される．

$$x(n) = x_{\rm cont}(nT), \quad -\infty \le n \le \infty \tag{1･5}$$

標本化周期 T に関して，$F_{\rm s} = 1/T$ [Hz] は標本化周波数とよばれ，$\Omega_{\rm s} = 2\pi/T$ [rad/sec] は標本化角周波数（あるいは単に標本化周波数）とよばれる．

与えられた連続時間信号のもつ情報を失うことなく標本化するためには，標本化周期（あるいは標本化周波数）を適切に選ぶ必要がある．これについて厳密に議論したものがシャノンの標本化定理である．以下に述べるように，標本化定理では連続時間信号 $x_{\rm cont}(t)$ とその標本化によって得られる離散時間信号 $x(n)$ をフーリエ変換によって関係づけ，離散時間信号から連続時間信号を完全に復元することが可能な標本化周波数の下限を与えている．

(1) 標本化定理

連続時間信号 $x_{\rm cont}(t)$ のフーリエ変換を $X_{\rm cont}(j\Omega)$ とし，これが次のような帯域 Ω_0 [rad/sec] に制限されているものとする．

$$X_{\rm cont}(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \ge \Omega_0 \tag{1･6}$$

このとき，標本化周波数 $\Omega_{\rm s}$ [rad/sec] が

$$\Omega_{\rm s} > 2\Omega_0 \tag{1･7}$$

を満たせば，離散時間信号 $x(n) = x_{\rm cont}(nT)$, $-\infty \le n \le \infty$ から連続時間信号 $x_{\rm cont}(t)$ を完全に復元できる．ただし，$T = 2\pi/\Omega_{\rm s}$ [sec] である．

1-2-2 量子化

前述のとおり，標本化は信号の時間変数を離散的な値にする操作である．これに対し，信号の振幅を離散的な値にする操作を量子化という．

ディジタル信号処理では，量子化された離散時間信号すなわちディジタル信号が処理の対象である．しかし，振幅の離散性を正確に記述してディジタル信号処理の基礎理論を組み立てることは数学的に極めて煩雑となるため，本章では振幅の離散性については考慮せずに議論を進める．

■1 群 - 9 編 - 1 章

1-3 離散時間フーリエ変換

(執筆者：越田俊介・川又政征)[2008 年 9 月 受領]

離散時間信号 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ は，次のように定義される．

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \text{ あるいは } 0 \leq \omega \leq 2\pi \tag{1・8}$$

$X(e^{j\omega})$ は一般には複素数であり，フーリエスペクトルあるいは周波数スペクトルともよばれる．また，$|X(e^{j\omega})|$ は振幅スペクトルとよばれ，$\angle X(e^{j\omega})$ は位相スペクトルとよばれる．

一方，離散時間フーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ から信号 $x(n)$ を求める演算は離散時間フーリエ逆変換とよばれ，次式で与えられる．

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega, \quad -\infty \leq n \leq \infty \tag{1・9}$$

ところで，ディジタルハードウェアやコンピュータのプログラムとして上述の離散時間フーリエ変換及び逆変換を実行しようとすると，以下の問題が生じる．

1. 式 (1・8) では，$X(e^{j\omega})$ を求めるために必要とする離散時間信号 $x(n)$ が無限長（$-\infty \leq n \leq \infty$）となっている．実際のディジタルハードウェアは有限長のメモリしか持たないので，無限長の信号を取り扱うことはできない．

2. 式 (1・8) 及び (1・9) 式では，周波数 ω が連続的な変数となっており，ディジタルハードウェア上で取り扱うことはできない．

3. 式 (1・9) で与えられる逆変換の演算では，積分が必要とされる．厳密な積分は，ディジタルハードウェア上では実行できない．

実際のディジタル信号処理システムにおいては，これらの問題点がないフーリエ変換として，離散フーリエ変換が用いられる．離散フーリエ変換の詳細については 6 章を参照されたい．

■1 群 - 9 編 - 1 章

1-4 z 変換

(執筆者:越田俊介・川又政征)[2008 年 9 月 受領]

連続時間システムの理論では,ラプラス変換が有用な数学的道具としてよく知られている.離散時間システムの理論では,z 変換が同様の役割を担っている.離散時間信号 $x(n)$ の z 変換 $X(z)$ は次のように定義される.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1・10}$$

ここで,z は複素変数である.信号 $x(n)$ が因果的である場合には,$X(z)$ は

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1・11}$$

と与えられる.これらの式を区別する場合には,式 (1・10) を両側 z 変換とよび,式 (1・11) を片側 z 変換とよぶ.信号 $x(n)$ の z 変換には,以下の表記法がよく用いられる.

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] \tag{1・12}$$

信号 $x(n)$ の z 変換 $X(z)$ において,z は複素数であるから,極座標表示を用いて $z = re^{j\omega}$ (r は非負の実数,ω は実数)と書ける.これを z 変換の定義式に代入すると,次式が得られる.

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n} \tag{1・13}$$

上式において $r = 1$ とすれば,$x(n)$ の z 変換 $X(z)$ は離散時間フーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ と一致する.従って,離散時間フーリエ変換は z 平面上の単位円で定義された z 変換であるといえる.

■1 群 - 9 編 - 1 章

1-5 線形時不変システム

（執筆者：越田俊介・川又政征）［2008 年 9 月 受領］

ディジタル信号処理では，離散時間の入力信号から出力信号を作り出すプログラム，アルゴリズム，回路などを総称して離散時間システムとよんでいる．数学的には，離散時間システムは入力信号の系列 $\{x(n)\}\,(-\infty \le n \le \infty)$ を出力信号の系列 $\{y(n)\}$ に変換する演算子として定義される．この演算子を S と表記すると，離散時間システムの入出力関係は $y(n) = S[\{x(n)\}]$ と表される．この表記は，実際には $y(n) = S\,[x(n)]$ と略記されることが多い．

任意の定数 a 及び任意の信号 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ に対して，離散時間システムが以下の二つの条件を満足するとき，このシステムは線形システムであるという．

$$S\,[ax(n)] = aS\,[x(n)] \tag{1・14}$$

$$S\,[x_1(n) + x_2(n)] = S\,[x_1(n)] + S\,[x_2(n)] \tag{1・15}$$

また，$y(n) = S\,[x(n)]$ とし，n_0 を任意に選んで入力 $x(n - n_0)$ をシステムに印加するとき，出力が $y(n - n_0)$ となるならば，このシステムは時不変システムであるという．

上述の線形性と時不変性をともに満足するシステムを，線形時不変システムという．線形時不変システムは，ディジタル信号処理において数学的に取り扱いやすいため，最もよく用いられている．

1-5-1 たたみこみと差分方程式

線形時不変システム $S[\,]$ への入力として，以下で定義される単位インパルス $\delta(n)$ を考える．

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{1・16}$$

この単位インパルスを用いると，任意の信号 $x(n)$ は $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$ と表現できる．いま，単位インパルス入力 $\delta(n)$ に対する $S[\,]$ の応答，すなわち単位インパルス応答を $h(n) = S[\delta(n)]$ とすると，$S[\,]$ の時不変性より $h(n-k) = S[\delta(n-k)]$ が成り立つ．このことと，$S[\,]$ の線形性を考慮することにより，$S[\,]$ へ任意の信号 $x(n)$ を入力したときの出力 $y(n)$ は次のように表される．

$$y(n) = S\,[x(n)] = S\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)S\,[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{1・17}$$

$x(n)$ と $h(n)$ に対して $y(n)$ を求める上式右辺の演算 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ は，たたみこみあるいはたたみこみ和とよばれる．たたみこみは，記号 “$*$” を用いて $y(n) = x(n) * h(n)$ のようにも表現される．また，上式右辺の変数を変換することにより，$y(n)$ は $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n)$ と表現することもできる．

上述のたたみこみは，時間変数 n に基づいてシステムの入出力関係を記述していることから，時間領域表現とよばれる．これに対し，もう一つの重要な時間領域表現として，線形差分方程式がある．

一般の離散時間システムの入出力関係を表す N 次差分方程式の一般形は，次式で与えられる．

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) \tag{1・18}$$

ただし，$n < 0$ に対しては $x(n) = y(n) = 0$ とする．上式の意味することは，線形離散時間システムの現時点での出力 $y(n)$ が，現在及び過去の入力 $x(n), x(n-1), \cdots, x(n-N)$ と，過去の出力 $y(n-1), y(n-2), \cdots, y(n-N)$ との線形結合で決定されるということである．上式において，N をシステムの次数という．また，システムの特性は係数 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ によって決定される．

1-5-2 安定性と因果性

ある離散時間システムに対して任意の有界入力を印加し，その結果有界出力を生ずるとき，このシステムは安定であるという．離散時間システムが安定であるための必要十分条件は，次のように単位インパルス応答の絶対値和が有限となることである．

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{1・19}$$

上式では絶対値の無限和を求める必要があるため，実際的な場面では，上式を用いてシステムの安定性を判別することは理論的にも数値計算的にも容易ではない．そこで，実際にシステムの安定性を判別する際には，伝達関数の極を求めることや伝達関数の代数的な計算による方法を用いる．この詳細については 2 章を参照されたい．

次に，因果性について定義する．ある任意の時点 n_0 におけるシステムの出力が，それ以前の入力，すなわち $n \leq n_0$ の入力によってのみ決定されるとき，このシステムは因果的あるいは実現可能であるという．すなわち因果的なシステムでは，すべての $n \leq n_0$ において等しい任意の二つの入力 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ が与えられたとき，それぞれの出力 $y_1(n)$ と $y_2(n)$ が $n \leq n_0$ において互いに等しくなる．離散時間システムは，単位インパルス応答 $h(n)$ が次の条件を満足する場合に限って因果的となる．

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \tag{1・20}$$

■1 群 - 9 編 - 1 章

1-6 周波数応答と伝達関数

（執筆者：越田俊介・川又政征）［2008 年 9 月 受領］

1-6-1 周波数応答

単位インパルス応答が $h(n)$ である線形・時不変の離散時間システムに対し，

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty \leq n \leq \infty \tag{1・21}$$

で示される周波数 ω [rad] の複素指数関数を入力することを考える．このとき，システムの出力は次のように得られる．

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \right\} e^{j\omega n} \tag{1・22}$$

ここで，

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \tag{1・23}$$

と定義すれば，システムの出力は $y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ と表される．この $H(e^{j\omega})$ は周波数応答とよばれる．$H(e^{j\omega})$ は一般に複素数であり，絶対値 $|H(e^{j\omega})|$ と偏角 $\theta(\omega)$ を用いて次のような形式でも表現できる．

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \tag{1・24}$$

上式の $|H(e^{j\omega})|$ と $\theta(\omega)$ はそれぞれシステムの振幅特性と位相特性とよばれる．

1-6-2 伝達関数

離散時間システムの入力 $x(n)$ の z 変換 $X(z)$ に対する出力 $y(n)$ の z 変換 $Y(z)$ の比 $Y(z)/X(z)$ を，このシステムの伝達関数という．ここで，入力 $x(n)$ を単位インパルス $\delta(n)$ とすると，$\mathcal{Z}[x(n)] = 1$ より伝達関数は $Y(z)$ と等しくなる．従って，伝達関数 $Y(z)/X(z)$ は単位インパルス応答 $h(n)$ の z 変換 $H(z)$ そのものとなり，次の関係が成立する．

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \tag{1・25}$$

次に，以下の N 次差分方程式によって記述される離散時間システムを考える．

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) \tag{1・26}$$

上式の両辺に z 変換を適用すると，以下の式が得られる*．

* 式 (1・27) の導出において，z 変換の線形性の性質 $\mathcal{Z}[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$ 及び推移の性質 $\mathcal{Z}[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$, $m > 0$ を用いている．

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X(z) \tag{1・27}$$

よって，このシステムの伝達関数 $H(z) = Y(z)/X(z)$ は以下のように求められる．

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{1・28}$$

離散時間システムの周波数応答 $H(e^{j\omega})$ は，伝達関数 $H(z)$ において $z = e^{j\omega}$ を代入することによって得られる．

■参考文献

1) B. Gold and C.M. Rader, “Digital Processing of Signals,” McGraw-Hill, 1969.
2) L.R. Rabiner and B. Gold. “Theory and Application of Digital Signal Processing,” Prentice-Hall, 1975.
3) A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, “Digital Signal Processing,” Prentice-Hall, 1975.
4) 樋口龍雄, “ディジタル信号処理の基礎,” 昭晃堂, 1986.
5) 樋口龍雄, 川又政征, “ディジタル信号処理–MATLAB 対応–,” 昭晃堂, 2000.