■1 群(信号・システム)- 9 編(ディジタル信号処理)

7 章 多次元信号処理

(執筆者:阿部正英・大木 真)[2009 年 9 月 受領]

■概要■

本章では,多次元信号処理について,多次元信号とその標本化,フーリエ変換について,2 次元信号の場合を代表として記述する.さらに,多次元システム・フィルタの性質や設計方法について 1 次元システムとの違いを示しながら説明する.

【本章の構成】

本章では,多次元信号(7-1 節),多次元信号の標本化とフーリエ変換(7-2 節),多次元システム,フィルタの設計(7-3 節)に関して述べる.

■1 群 - 9 編 - 7 章

7-1 多次元信号

（執筆者：阿部正英）［2009 年 9 月 受領］

信号は $x_a(t_1, t_2, ..., t_N)$ のように関数のかたちで記述される．このとき，関数の変数の数を次元という．すなわち，信号は $x_a(t_1, t_2, ..., t_N)$ は N 次元信号である．多次元信号とシステムの多くは，1 次元信号とシステムの理論を多次元に拡張したものと考えることができる．以降では，その代表として 2 次元信号の場合について記述する．

2 次元連続空間信号 $x_a(t_1, t_2)$ とは，連続な空間変数 t_1 と t_2 をとる 2 次元信号である．一方，2 次元離散空間信号 $x(n_1, n_2)$ とは，空間変数が整数 n_1 と n_2 をとる 2 次元信号である．

基本的な離散空間信号を次にあげる．

単位インパルス

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 = 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{7・1}$$

単位ステップ

$$u_0(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1, n_2 \geq 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{7・2}$$

2 次元複素指数関数

$$\exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2), \quad n_1, n_2 = -\infty \sim \infty \tag{7・3}$$

また，離散空間信号 $x(n_1, n_2)$ が $x(n_1, n_2) = x_1(n_1)x_2(n_2)$ のように，各変数ごとの 1 次元信号 $x_1(n_1)$ と $x_2(n_2)$ の積の形で表せるとき，$x(n_1, n_2)$ は分離可能であるという．このように，分離可能な離散空間信号については，1 次元信号の理論と処理が直接利用できる．

■1 群 - 9 編 - 7 章

7-2 多次元信号の標本化とフーリエ変換

（執筆者：阿部正英）［2009 年 9 月 受領］

7-2-1 標本化（サンプリング，多次元標本化定理）

2 次元離散空間信号 $x(n_1, n_2)$ は，2 次元連続空間信号 $x_a(t_1, t_2)$ から次のように標本化して得られる．

$$x(n_1, n_2) = x_a(t_1, t_2)|_{t_1=n_1T_1, t_2=n_2T_2} \tag{7·4}$$

ここで，T_1 と T_2 は，それぞれ t_1 と t_2 方向の標本化周期である．

この場合の 2 次元標本化定理は次のようになる．

2 次元連続空間信号 $x_a(t_1, t_2)$ が次のように帯域制限されているとする．

$$X_a(j\Omega_1, j\Omega_2) = 0,\quad |\Omega_1| \geq \Omega_{c_1}, |\Omega_2| \geq \Omega_{c_2} \tag{7·5}$$

このとき，標本化の間隔 T_1, T_2 が

$$T_1 < \frac{\pi}{\Omega_{c_1}} \text{かつ } T_2 < \frac{\pi}{\Omega_{c_2}} \tag{7·6}$$

を満たせば，2 次元連続空間信号 $x_a(t_1, t_2)$ は，その標本値である 2 次元離散空間信号 $x(n_1, n_2)$ から完全に復元できる．

7-2-2 フーリエ変換（離散空間フーリエ変換）

2 次元連続空間信号 $x_a(t_1, t_2)$ の 2 次元連続空間フーリエ変換は次のように定義される．

$$X_a(j\Omega_1, j\Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t_1, t_2)e^{-j\Omega_1 t_1}e^{-j\Omega_2 t_2}dt_1 dt_2,\quad \Omega_1, \Omega_2 = -\infty \sim \infty \tag{7·7}$$

このとき，2 次元連続空間フーリエ逆変換は次のように定義される．

$$x_a(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega_1, j\Omega_2)e^{j\Omega_1 t_1}e^{j\Omega_2 t_2}d\Omega_1 d\Omega_2,\quad t_1, t_2 = -\infty \sim \infty \tag{7·8}$$

2 次元離散空間信号 $x(n_1, n_2)$ の 2 次元離散空間フーリエ変換は次のように定義される．

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2)e^{-j\omega_1 n_1}e^{-j\omega_2 n_2},\quad \omega_1, \omega_2 = -\pi \sim \pi \tag{7·9}$$

このとき，2 次元離散空間フーリエ逆変換は次のように定義される．

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)e^{j\omega_1 n_1}e^{j\omega_2 n_2}d\omega_1 d\omega_2,\quad n_1, n_2 = -\infty \sim \infty \tag{7·10}$$

2 次元離散空間信号 $x(n_1, n_2)$ の 2 次元離散フーリエ変換は次のように定義される．

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{k_1 n_1} W_{N_2}^{k_2 n_2}, k_1 = 0, 1, \cdots, N_1 - 1, \quad k_2 = 0, 1, \cdots, N_2 - 1 \tag{7・11}$$

ここで，W_{N_1} と W_{N_2} は回転因子であり，

$$W_{N_1} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N_1}\right) \tag{7・12}$$

$$W_{N_2} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N_2}\right) \tag{7・13}$$

である．このとき，2 次元離散フーリエ逆変換は次のように定義される．

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) W_{N_1}^{-k_1 n_1} W_{N_2}^{-k_2 n_2}$$

$$n_1 = 0, 1, \cdots, N_1 - 1, \quad n_2 = 0, 1, \cdots, N_2 - 1 \tag{7・14}$$

7-2-3 z 変換

2 次元離散空間信号 $x(n_1, n_2)$ の z 変換は次のように定義される．

$$X(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \tag{7・15}$$

このとき，逆 z 変換は次のように定義される．

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} X(z_1, z_2) z_1^{n_1-1} z_2^{n_2-1} dz_1 dz_2 \tag{7・16}$$

ここで，Γ_1 と Γ_2 は z_1 平面及び z_2 平面の原点を囲む閉曲線である．

■1 群 - 9 編 - 7 章

7-3 多次元システム，フィルタの設計（可分離処理と非分離処理）

（執筆者：大木　真）[2009 年 9 月 受領]

7-3-1 多次元システム [1, 2, 3, 4, 5, 6)]

多次元システムや多次元フィルタの性質の多くは 1 次元システムと同様であるが，システムの安定性判別やシステムの合成・実現などの点で違いがある．以下では，簡単のために線形・シフト不変な 2 次元離散空間システムを中心に説明する．

(1) 多次元システムの表現法

(a) 単位インパルス応答

2 次元離散空間システムに単位インパルス $\delta(n_1, n_2)$ を入力したときの出力信号が，システムの単位インパルス応答 $h(n_1, n_2)$ である．一般の入力信号 $u(n_1, n_2)$ に対する出力信号 $y(n_1, n_2)$ は，入力信号と単位インパルス応答の多次元畳み込みによって求められる．

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) u(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \tag{7・17}$$

(b) 差分方程式表現

有限次数の 2 次元離散空間システムの入出力特性は，2 変数の差分方程式で表すことができる．

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(k_1,k_2)\in S_a} a_{k_1,k_2} y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) + \sum_{(k_1,k_2)\in S_b} b_{k_1,k_2} u(n_1 - k_1, n_2 - k_2)) \tag{7・18}$$

ここで，a_{k_1,k_2}，b_{k_1,k_2} はシステム係数 (フィルタ係数)，S_a，S_b は a_{k_1,k_2}，b_{k_1,k_2} のサポート集合である．

(c) 伝達関数表現

1 次元の場合と同様，入出力信号の z-変換の比によってシステムの伝達関数を定義することができる．

$$H(z_1, z_2) = \frac{Y(z_1, z_2)}{U(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{(k_1,k_2)\in S_b} b(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}}{1 - \sum_{(k_1,k_2)\in S_a} a(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}} \tag{7・19}$$

ここで，$Y(z_1, z_2)$，$U(z_1, z_2)$ は $y(n_1, n_2)$，$u(n_1, n_2)$ の z-変換である．伝達関数は単位インパルス応答の z-変換に等しい．

$$H(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \tag{7・20}$$

(d) 状態空間表現 [7, 8, 9, 10)]

多次元システムの状態空間表現には複数の表現法が存在する．以下の Roesser モデル[12)] と FM-II モデル[13)] が広く使用されている．

Roesser モデル

$$\begin{bmatrix} x^h(n_1+1, n_2) \\ x^v(n_1, n_2+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(n_1, n_2) \\ x^v(n_1, n_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(n_1, n_2) \tag{7・21}$$

$$y(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(n_1, n_2) \\ x^v(n_1, n_2) \end{bmatrix} + Du(n_1, n_2) \tag{7・22}$$

Fornasini-Marchesini の第 2 モデル（FM-II モデル）

$$x(n_1+1, n_2+1) = A_1 x(n_1, n_2+1) + A_2 x(n_1+1, n_2) + B_1 u(n_1, n_2+1) + B_2 u(n_1+1, n_2) \tag{7・23}$$

$$y(n_1, n_2) = Cx(n_1, n_2) \tag{7・24}$$

Roesser モデルでは，状態ベクトル x を水平方向ベクトル x^h と垂直方向ベクトル x^v に分割する必要があるが，状態空間モデルの式の形は 1 次元の場合と同様である．FM-II モデルでは，状態ベクトル x は単一であるが，入力信号 u の与え方や状態ベクトルの更新の仕方が 1 次元の場合とは異なる．

(2) 安定性 [9, 10, 11]

多次元離散空間システムが BIBO 安定となる条件としては，以下の Shanks の定理[14] が基本である．

[Shanks の定理] システム $H(z_1, z_2) = 1/D(z_1, z_2)$ が安定である必要十分条件は，

$$D(z_1, z_2) \neq 0 \quad \text{for } |z_1| \geq 1 \text{ and } |z_2| \geq 1 \tag{7・25}$$

となることである．

しかし，多変数多項式 $D(z_1, z_2)$ は常に因数分解可能とは限らないので，上の条件を有限回の代数演算でチェックできるとは限らない．そこで，できるだけ少ない演算で安定性を判別できるような方法の研究が行われている．また，次節で述べる分離処理を用いて多次元システムの安定性判別を 1 次元システムの安定性判別に帰着させることも多い．

なお，多くの多次元信号において，変数 n_i の内で一つだけが無限の広がりをもち，残りの変数は有限範囲に収まることが多い．この性質を利用すると多次元システムの安定条件が緩和されることが知られている[15]．

(3) 分離処理と非分離処理

代数学の基本定理により 1 変数の多項式は常に因数分解可能であるので，1 次元システムの伝達関数 $H(z)$ は任意の低次システムに分解することができる．この性質を利用すると，システムの合成・実現を容易に行うことができる．これに対して多次元システムの場合，多変数多項式の因数分解が常に可能とは限らないので，システムの合成・実現は 1 次元と比較して複雑となる．そこで，多次元伝達関数 $H(z_1, z_2)$ にある程度制限を加えることによって，これらの問題を簡単化することがよく行われている．以下では，制限を加えない本来の多次元処理を非分離処理，伝達関数に制限を加えた処理を分離処理と呼んで，いくつかの分離処理について説明する．

(a) 完全分離形

多次元伝達関数を変数ごとの 1 次元伝達関数に分離できる場合，完全分離形（completely separable form）と呼ぶ.

$$H(z_1, z_2) = H_1(z_1)H_2(z_2) = \frac{N_1(z_1)}{D_1(z_1)}\frac{N_2(z_2)}{D_2(z_2)} \tag{7・26}$$

この伝達関数は，処理方向の異なる 1 次元システムを単純に縦続接続することに対応するので，信号自身が分離形の場合を除いて処理能力には制限が多い.

（b）分母分離形

多次元伝達関数の分母多項式のみが変数ごとに分離されている場合，分母分離形（separable denominator form）と呼ぶ.

$$H(z_1, z_2) = \frac{N(z_1, z_2)}{D_1(z_1)D_2(z_2)} \tag{7・27}$$

分母分離形は分母多項式が分離されているので，安定性判別に 1 次元の安定判別法を直接用いることができる．また，比較的広い範囲の特性を分母分離形で表現できることが知られている.

（c）3 項分母分離形

非分離ではあるが取り扱いの容易な z_1z_2 の多項式 $D(z_1z_2)$ を分母分離形の分母多項式に追加した伝達関数を，3 項分母分離形（three-terms separable denominator form）と呼ぶ．分母分離形よりも広い範囲の特性を表現することができる.

$$H(z_1, z_2) = \frac{N(z_1, z_2)}{D_1(z_1)D_2(z_2)D(z_1z_2)} \tag{7・28}$$

（d）多段分離形

上に述べたように完全分離形の伝達関数は 1 次元伝達関数の縦続接続に過ぎないが，複数の完全分離形を並列接続すると，より広い範囲の特性を表現することができるようになる.

$$H(z_1, z_2) = \sum_{l=1}^{r} H_{1,l}(z_1)H_{2,l}(z_2) \tag{7・29}$$

この形の伝達関数を多段分離形（multistage separable form）と呼ぶ.

7-3-2 多次元フィルタの設計 [16, 17, 18)]

1 次元フィルタの設計に用いられる設計法の多くは，多次元フィルタの設計に拡張することができる．ただし，次元が高くなるにつれて設計変数の数が急激に増加するので，高い次数のフィルタの設計は難しくなる．また，1 次元の等リプルフィルタの設計に用いられる交番定理が多次元の場合には成り立たないなど，いくつかの制限が存在する.

そこで，先に述べた分離処理を用いて多次元フィルタの設計問題を 1 次元フィルタの設計問題に帰着したり，変数変換を用いて 1 次元フィルタから多次元フィルタを生成することが行われる．以下では，後者の方法の代表としてマクレラン変換（McClellan Transformation）[19)] について説明する.

何らかの方法で設計された 1 次元の零位相 FIR フィルタを考えると，その周波数特性は以

下の式で表現できる．

$$H_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N} c_k \cos(k\omega) = \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(\cos(\omega)) = \sum_{k=0}^{N} d_k \cos^k(\omega) \tag{7・30}$$

ただし，$P_k(x)$ は以下の漸化式で定義されるチェビシェフ多項式である．

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_k(x) &= 2xP_{k-1}(x) - P_{k-2}(x) \quad (k \geq 2) \end{aligned} \tag{7・31}$$

ここで，2 次元の周波数平面において原点から放射方向に上の 1 次元フィルタと同じ特性をもち，振幅応答の等高線が指定された形（例えば円）になるような 2 次元零位相 FIR フィルタを設計したいとする．1 次元の周波数 ω と 2 次元の周波数 (ω_1, ω_2) の対応関係を，

$$\cos(\omega) = g(\omega_1, \omega_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1} \sum_{l_2=0}^{L_2} g_{l_1,l_2} \cos^{l_1}(\omega_1) \cos^{l_2}(\omega_2) \tag{7・32}$$

という関数で表すものとし，この式を 1 次元フィルタの周波数応答に代入する．

$$\begin{aligned} H_1(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N} d_k \cos^k(\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{N} d_k g(\omega_1, \omega_2)^k = \sum_{k=0}^{N} d_k \left(\sum_{l_1=0}^{L_1} \sum_{l_2=0}^{L_2} g_{l_1,l_2} \cos^{l_1}(\omega_1) \cos^{l_2}(\omega_2) \right)^k \\ &= \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} d_{k_1,k_2} \cos^{k_1}(\omega_1) \cos^{k_2}(\omega_2) \end{aligned} \tag{7・33}$$

チェビシェフ多項式の逆関数を用いて，上式の最後の項を $\cos^k(\omega)$ から $\cos(k\omega)$ の形に戻してやると，2 次元零位相 FIR フィルタの周波数応答の式が得られる．

$$\sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} d_{k_1,k_2} \cos^{k_1}(\omega_1) \cos^{k_2}(\omega_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} c_{k_1,k_2} \cos(k_1\omega_1) \cos(k_2\omega_2) = H_2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \tag{7・34}$$

c_{k_1,k_2} が設計された 2 次元フィルタのフィルタ係数である．

円対称通過域フィルタやファンフィルタ (Fan Filter) については，簡単な変換式が知られている．

$$\text{円対称フィルタ：} g(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}(-1 + \cos(\omega_1) + \cos(\omega_2) + \cos(\omega_1)\cos(\omega_2)) \tag{7・35}$$

$$\text{ファンフィルタ：} g(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{2}(\cos(\omega_1) - \cos(\omega_2)) \tag{7・36}$$

複雑な等高線形状を実現したい場合は，変換関数 $g(\omega_1, \omega_2)$ 自身を何らかの方法で設計する必要がある．

■参考文献

1) 川又政征, 樋口龍雄, “多次元ディジタル信号処理,” 朝倉書店, 1995.
2) 樋口龍雄 編, “多次元ディジタル信号処理,” コンピュートロール, no.30, コロナ社, 1990.
3) “Multidimensional Signals, Circuits and Systems,” ed. by K. Galkowski and J. Wood, Taylor & Francis, 2001.
4) J.W. Woods, “Multidimensional Signal, Image, and Video Processing and Coding,” Academic Press, 2006.
5) D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau, “Multidimensional Digital Signal Processing,” Prentice-Hall, 1984.
6) J.S. Lim, “Two-Dimensional Signal and Image Processing,” Prentice-Hall, 1990.
7) K. Galkowski, “State-Space Realisation of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD ($n > 2$) Case,” Springer, 2001.
8) E. Zerz, “Topics in Multidimensional Linear Systems Theory,” Springer, 2000.
9) “Multidimensional Systems,” ed. by S.G. Tzafestas, Marcel Dekker, 1986.
10) T. Kaczorek, “Two-Dimensional Linear Systems,” Springer, 1985.
11) N.K. Bose, “Applied Multidimensional Systems Theory,” Van Nostrand Reinhold, 1982.
12) R.P. Roesser, “A Discrete State Space Model for Image Processing,” IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-20, no.2, pp.1-10, Feb., 1975.
13) E. Fornasini and G. Marchesini, “Doubly-Indexed Dynamical Systems: State-Space Models and Structural Properties,” Math. Syst. Theory, vol.12, pp.59-72, 1978.
14) J.L. Shanks, S. Treitel, and J.H. Justice,“Stability and Synthesis of Two-Dimensional Recursive Filters,” IEEE Trans. Audio & Electroacoust., vol.AU-20, no.2, pp.115-128, Jun., 1972.
15) P. Agathoklis and L.T. Bruton, “Practical-BIBO stability of n-dimensional discrete systems,” IEE Proc., vol.130, Pt.G, no.6, Dec., 1983.
16) W.-S. Lu and A. Antoniou, “Two-Dimensional Digital Filter,” Marcel Dekker, 1992.
17) 武部 幹, “ディジタルフィルタの設計,” 東海大学出版会, 1986.
18) B.A. Shenoi, “Magnitude and Delay Approximation of 1-D and 2-D Digital Filters,” Springer, 1999.
19) J.H. McClellan, “The Design of Two-Dimensional Digital Filters by Transformations,” Proc. 7th Annual Princeton Conf. Informations Sciences and Systems, pp.247-251, 1973.