

1 群 (信号・システム) - 11 編 (非線形問題)

1 章 非線形力学系

(執筆者:)

概要

【本章の構成】

1 群 - 11 編 - 1 章

1-1 力学系の種類

1-1-1 力学系, 相空間

(執筆者: 上田哲史)[2009年3月受領]

時間を $t \in \mathbf{R}$, 状態変数を $x \in \mathbf{R}^n$ として, 物理対象の動力学的性質を数理モデルで表現したとき, これを力学系という. 自然科学, 社会科学における様々な動的な物理対象から本質的な状態変数を見だし, 現象を十分説明できる力学系を構成することは非線形問題の一つの課題である. 力学系が 1 階常微分方程式 $\dot{x} = f(t, x)$ でモデル化されたとき, $f = (f_1, \dots, f_n)$ はベクトル場と呼ばれ, 一般に状態や時刻に関して非線形な関数で表される. また, f が統計的要素を含んでいない場合, 力学系は決定論的であるという.

微分方程式の解を $x(t) = \varphi(x_0, t)$ と表す. ここで $x(0) = x_0$ は初期値である. 解の初期値からの時間発展, つまり解軌道を求める問題は, 常微分方程式の初期値問題と呼ばれる. 解軌道がなす n 次元空間を相空間といい, 力学系とは, 解軌道上のある時刻における解の速度が, その位置におけるベクトル場 f に一致する関係と解釈できる. f が非線形であれば, 初期値問題を解析的に求めることは困難であり, 数値計算により近似解を求める必要がある.

与えられた力学系について, 相空間上での解の挙動を大域的に理解することは, 単に初期値問題を解く以上に大切な課題である. 時間の進展 $t \rightarrow \infty$ とともに解がどのような集合に到達するか, 初期値やパラメータの変化に関してどのように解が変化するかを解析し, 力学系の定性的性質の知見を得ることは, その力学系の設計や新たな機能の創出などの工学的応用へと発展させる鍵となる.

1-1-2 保存系, 可積分系, 散逸系

(執筆者: 上田哲史)[2009年3月受領]

ある力学系について位置 $q = (q_1, \dots, q_m)$, 及び運動量 $p = (p_1, \dots, p_m)$ が選べたとする. ここで状態変数を $x = (q, p) \in \mathbf{R}^n$, $n = 2m$ としたとき, 系の構造から決まるポテンシャルエネルギー $V(q)$ と, 運動量から決まる運動エネルギー $T(p)$ とすれば, それらの和 $H(p, q) = T + V$ は系の全エネルギーを表す. 力学系が保存系, もしくはハミルトン系であるとは,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

という関係が成り立つときである. 保存系の例として, 調和振動子や摩擦のない球面振子などがある.

H が t に関する項を陽にもたない場合は $dH/dt = 0$ となり, 全エネルギー H はあらゆる時刻において一定値を取る. このときの運動は $(n-1)$ 次元多様体に拘束されるため, 運動を表現する独立な状態の次元が一つ減じられる. 全エネルギーは保存量となり, 初期値によって決定される. 保存量を有する力学系を可積分系といい, 保存系はその一つのクラスである. 保存量を見つけることは, 運動を解析的に表現する糸口を掴むことになる. 天体運動の 2 体問題は可積分系であり, 運動を表す解関数を求めることができるが, 3 体問題は可積分系にはならないことがポアンカレによって示されている.

一方, 摩擦などの要素が含まれる力学系は散逸系と呼ばれる. 例えば, 減衰振動子は全エネルギーの時間微分があらゆる時刻で負となることを示すことができ, 運動はやがて停止す

ることが示される。

保存系は方程式の対称性から時間の反転に関して運動が不変であり、また、リュービルの定理により相空間における体積が保存される。このことから、相空間の体積が 0 に漸近する系が散逸系とも定義できる。相空間の体積は、発散

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

の計算によって知ることができる。これが常に負である場合、相空間の体積は 0 に漸近する。

しかし、散逸系のすべてが減衰振動子のように運動の停止などの単純な状況を迎えるわけではない。エネルギーを供給する要素が散逸系に含まれている場合は相空間の体積が 0 とはなっていない、リミットサイクルやストレンジアトラクタなどの複雑な状況を生み出す可能性がある。

1-1-3 離散時間力学系，連続時間力学系 （執筆者：吉永哲哉）[2009 年 3 月受領]

決定論的集中定数系の時間発展が離散的か連続的か、すなわち、時間を離散とみるか連続とみるかによって、力学系を離散時間力学系 (discrete-time dynamical system) と連続時間力学系 (continuous-time dynamical system) に分類する。

離散時間力学系では、離散時刻 k における状態を $x(k)$ などで表し、時刻 0 での初期値 $x(0)$ から出発した数列 $\{x(k), k = 0, 1, \dots\}$ が軌道となる。状態 $x(k)$ から次の時刻の状態 $x(k+1)$ を定める規則を常差分方程式 (漸化式)

$$x(k+1) = T(x(k)), \quad x(k) \in X, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

または、写像

$$T : X \rightarrow X; x(k) \mapsto x(k+1) = T(x(k)) \quad (1.2)$$

で表す。ここに、 X は状態空間である。写像が逆写像をもたない、すなわち、非可逆写像の場合、時間を遡って状態を一意に定めることができない。離散時間力学系の例として、生物の個体数の挙動を単純化した数理モデルなどがあげられる。ロジスティック (logistic) 写像

$$x(k+1) = \alpha(1-x(k))x(k), \quad x \in [0, 1] \quad (1.3)$$

やエノン (Hénon) 写像

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 1 + x_2(k) - \alpha x_1(k)^2 \\ x_2(k+1) &= b x_1(k), \quad x_1, x_2 \in R \end{aligned} \quad (1.4)$$

は見かけ上は簡単なかたちをもつが、パラメータ (式 (1.3) の $\alpha \in R$, 式 (1.4) の $a, b \in R$) の値によっては複雑な現象が生ずることで有名である。

連続時間力学系の状態方程式は、状態空間を X として、一般的に次の常微分方程式で記述される。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in X, \quad t \in R \quad (1.5)$$

この式は、時刻 t における状態 $x(t)$ の速度の関係を表している。幾何学的には、状態と時刻に依存した速度ベクトル場を状態空間の各点に定めることが連続時間力学系を定義することであるといえる。

1-1-4 自律系・非自律系

(執筆者：吉永哲哉)[2009年3月受領]

連続時間力学系において、状態方程式に時刻を陽に含まない場合、含む場合をそれぞれ、自律系 (autonomous system)、非自律系 (non-autonomous system) と呼ぶ。したがって、自律系は式 (1.5) の特殊な場合として次式で表すことができる。

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad x \in X, \quad t \in R \quad (1.6)$$

ただし、速度ベクトル場 $g(x(t))$ は時刻を陰に含むかたちで時間的に変化する。

一方、非自律系の状態方程式において時刻を陽に含む項は、対象系が外部から影響を受けていることを意味し、外部入力として加法的に印加される場合や、状態変数にかかるパラメータが時間的に変化する場合 (パラメータ励振系) などが対象となる。非自律系のうち、速度ベクトル場が時間に関して周期的である系を周期的非自律系と呼ぶ。

系が自律か非自律かによって状態の挙動は異なり、別の解析方法が必要となることがある。例えば、非自律系においては、速度ベクトル場が常に 0 となる点 (自律系の平衡点) は存在せず、自律系のように時間軸の平行移動に関して方程式は不変ではない。

1-1-5 ポアンカレ写像

(執筆者：吉永哲哉)[2009年3月受領]

連続時間力学系にみられる周期解や非周期解の定性的性質を調べる際に有効となる幾何学的解析手法として、離散時間力学系の問題に帰着させる方法がある。これは、自律系にみられるリミットサイクル (極限閉軌道) の考察においてポアンカレ (Poincaré) によって提案された。ここでは、状態空間を R^n とする。

(1) 自律系のポアンカレ写像

自律系にみられる振動的な解が状態空間内の超曲面 (局所断面)

$$\Pi = \{x \in R^n \mid q(x) = 0\}, \quad q : R^n \rightarrow R; \quad x \mapsto q(x) \quad (1.7)$$

に横断的に交差する状況を考える。初期値 x_0 を出発した解を $\varphi(t, x_0)$ で表したとき、解軌道を用いて定義した写像

$$P : \Pi \rightarrow \Pi; \quad x \mapsto \varphi(\tau(x), x) \quad (1.8)$$

をポアンカレ写像 (Poincaré map) または帰還写像 (recurrence map) と呼ぶ。ここに、 τ は Π 上の初期値を出発した解が再び最初に Π と交わるまでの時間 (帰還時間) を表す。

系に周期解がみられ、超曲面 Π に局所座標を定義したとき、局所座標の状態空間 $\Sigma \subset R^{n-1}$ 上でのポアンカレ写像 $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ を写像 P から誘導できる。このとき、周期解の性質を T の

固定点の性質に帰着させて解析を行うことが可能となる。

(2) 周期的非自律系のポアンカレ写像

式 (1.5) の速度ベクトル場が任意の時刻 t で

$$f(t + L, x) = f(t, x), \quad L > 0 \quad (1.9)$$

を満たす周期的非自律系を対象とする。初期値 $x_0 \in R^n$ を出発する解 $\varphi(t, x_0)$ が周期 L をもつとき、系の周期性を用いて定義した写像

$$T : R^n \rightarrow R^n ; x \mapsto \varphi(L, x) \quad (1.10)$$

をストロボ写像 (stroboscopic map), または非自律系のポアンカレ写像と呼ぶ。

1-1-6 ハイブリッドシステム

(執筆中)

1 群 - 11 編 - 1 章

1-2 代表的な力学系

(執筆者: 久門 尚史) [2009 年 4 月受領]

1-2-1 van der Pol 方程式

van der Pol 方程式は

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (1 \cdot 11)$$

のように表現される。この方程式は図 1・1 の発振回路のモデルとして van der Pol によって研究された¹⁾。 $\mu > 0$ では原点の平衡点は不安定であり、振幅が小さいと発散し、振幅が大きくと減衰する特性をもつ。これは、Hopf 分岐により平衡点が不安定となり、リミットサイクルが現れることに対応する。また、 μ が大きくなると弛張振動が発生する。このような自励系における振動を自励発振と呼ぶ。一方、この方程式に正弦波の外力を加えた非自励系の van der Pol 方程式では、引き込みがおこり、カオスの振動も見られる^{2, 3)}。

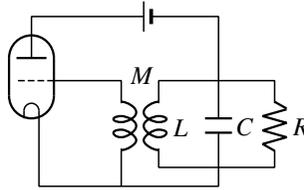


図 1・1 van der Pol 発振回路

1-2-2 Duffing 方程式

Duffing 方程式は

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t + \phi) \quad (1 \cdot 12)$$

のように表現され、電力系統の現象を説明するためにこの方程式を導出した Duffing にちなんでこのように呼ばれる。この方程式は非線形の復元項をもつ受動的共振回路の方程式であるが、 β の正負により、柔らかい特性と固い特性に分けられる(図 1・2 参照)。過飽和鉄心の磁気特性を三次特性で近似した図 1・3 の回路の方程式は β が正の Duffing 方程式で記述できる。この方程式において $\delta = \gamma = 0$ の特別な自励系の場合は Jacobi の楕円関数を用いて解析解が表現できる。一方、外力が伴う場合は基本調波、分数調波、高調波の非線形共振が発生し、跳躍現象などが見られる^{4, 3)}。また、この方程式に現れるカオスの振動は、上田により詳細に研究された⁵⁾。

1-2-3 Mathieu 方程式・Hill 方程式

Hill 方程式は周期係数をもつ線形方程式

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \quad (1 \cdot 13)$$

のように表現される．また，特に

$$\ddot{x} + (a + 2b \cos 2t)x = 0 \tag{1\cdot14}$$

のかたちのものを Mathieu 方程式と呼ぶ．パラメータ励振系を表現する周期係数の 2 階線形常微分方程式

$$\ddot{y} + 2\alpha(t)\dot{y} + \beta(t)x = 0 \tag{1\cdot15}$$

は，変換

$$x = ye^{\int \alpha dt}, \quad q = \beta + \alpha^2 - \dot{\alpha} \tag{1\cdot16}$$

により，Hill 方程式に帰着される．これらの方程式はフロケ理論や摂動法により解析され⁶⁾，周期振動の安定性解析や，空間的に周期構造をもつ系におけるバンド構造の解析などにも用いられる．

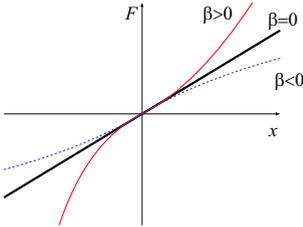


図 1・2 復元項の柔らかい特性と固い特性 ($F = \omega_0^2 x + \beta x^3$)

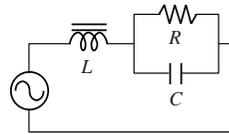


図 1・3 Duffing 方程式の電気回路モデル

参考文献

- 1) B. van der Pol, "A Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations," Radio Review, vol.1, pp.701-710, 1920.
- 2) B. van der Pol and J. van der Mark, "Frequency Demultiplication," Nature, vol.120, pp.363-364, 1927.
- 3) E.A. Jackson, "Perspectives of Nonlinear Dynamics," Cambridge University Press, 1991. (田中茂, 丹羽敏雄, 水谷正大, 森真 訳, "非線形力学の展望," 共立出版株式会社, 1994.)
- 4) C. Hayashi, "Nonlinear Oscillations in Physical Systems," McGrawHill, New York, 1964.
- 5) 上田よし亮, "カオス現象論," コロナ社, 2006.
- 6) W. Magnus and S. Winkler, "Hill's Equation," Dover Publications, Inc., New York, 1979.

1 群 - 11 編 - 1 章

1-3 力学系の定常解と安定性

1-3-1 定常解, 平衡点

(執筆者: 北島博之)[2009年3月受領]

自律系微分方程式 $dx/dt = f(x)$ において $f(x) = 0$ を満たす点を平衡点 (equilibrium point) といい, ここでは \bar{x} で表す. 平衡点は, その近くから出発した解が将来にわたって近くにとどまるとき, Lyapunov の意味で安定であるという. 平衡点 \bar{x} が Lyapunov の意味で安定であるとは, 任意の正数 ϵ を与えたとき, ある正数 δ が存在し, 平衡点の δ 近傍の任意の点を出発する解が, すべての時刻において平衡点の ϵ 近傍に含まれるときをいう. 更に, Lyapunov の意味で安定でありかつ, ある正数 ϵ を与えたとき, 平衡点の ϵ 近傍の任意の点を出発する解 $x(t)$ が $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ を満たす場合, 平衡点は漸近安定であるという.

また, 平衡点の安定性は系を平衡点の近傍で線形化することにより議論することができる. この平衡点からの微量のずれを $\xi(t)$ とする. $\xi(t)$ を変分 (variation) という. $x(t) = \bar{x} + \xi(t)$ を元の式に代入しテイラー展開し, $\xi(t)$ に関する線形項のみを抽出すれば $d\xi/dt = A\xi(t)$ を得る. ここに,

$$A = Df(\bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(t)=\bar{x}}$$

である. $\partial f/\partial x$ は f の微分 (ヤコビ行列) という. $d\xi/dt = A\xi(t)$ を変分方程式または平衡点 \bar{x} に関する $dx/dt = f(x)$ の線形化方程式という. ヤコビ行列 A の固有値が 0 を持たない場合, その平衡点は双曲的 (hyperbolic) または単純 (simple) であると言い, n 次元自律系においては位相幾何学的に性質の異なる $n+1$ 個の双曲型平衡点に分類可能である¹⁾. 双曲型平衡点は, 線形化方程式の A のすべての固有値が負の実部をもつならば, その平衡点は漸近安定である.

1-3-2 ヤコビ行列

(執筆者: 北島博之)[2009年3月受領]

本章 1-3-1 節において出てきた f の微分 $\partial f/\partial x$ をヤコビ行列という. その (i, j) 要素は, $\partial f_i/\partial x_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) で与えられる. ここで系の次元を n とした. 双曲型平衡点や双曲型周期解の安定性を判別するときには, ヤコビ行列の固有値により安定性の議論が可能となる. 平衡点においては, ヤコビ行列のすべての固有値の実部が負であれば, また周期解では絶対値が 1 より小さければそれぞれ漸近安定である. 二次元離散系において, ヤコビ行列の幾何学的意味を考える. 微小面積 ds は写像 F により $F(ds) = Jds$ となる. ここで J はヤコビ行列の行列式 (ヤコビアン) であり, J は写像により写される面積比を表すことになる. また, 非可逆写像においては, ヤコビアンが 0 になる集合を 1 回写像した集合は特異曲線 (critical curve) と呼ばれ, アトラクタの引力圏 (basin of attraction) 構造の形状に影響を及ぼすことが知られている²⁾. 特に, 引力圏の境界線が特異曲線と接する点は引力圏の分岐 (basin bifurcation) と呼ばれ, 引力圏の形状が劇的に変化することが知られている.

1-3-3 リャプノフ関数

(執筆者: 小西啓治)[2009年3月受領]

非線形システム $\dot{x} = f(x)$ の軌道 x を解析的に導出することは, 一般的に難しい. しかしながら, システムに存在する平衡点 \bar{x} の安定性を調べることは, システムの挙動を把握する

上で欠かせない。

[リアプノフの安定定理] 平衡点 \bar{x} を含む閉領域 U で、次の二つの条件を満たす連続かつ微分可能なスカラー関数 $V(x)$ が存在するならば、その平衡点は安定 (漸近安定) である。

- 領域 $U - \{\bar{x}\}$ で $V(x) > 0$ かつ $V(\bar{x}) = 0$;
- 領域 U で $\dot{V}(x) \leq 0$ (領域 $U - \{\bar{x}\}$ で $\dot{V}(x) < 0$) .

上記の定理を満足する関数 $V(x)$ をリアプノフ関数 (Lyapunov function) と呼ぶ^{3,4)}。この定理では、軌道 x の振る舞いをスカラー関数 $V(x)$ に写像し、 $V(x)$ の時間変化を安定性の判別に利用している。ある平衡点においてリアプノフ関数を見つけることができれば、その平衡点は安定 (漸近安定) であると判別される。しかし、一般的にその逆は成立しておらず、この定理は十分条件を与えているに過ぎない。また、今のところ、適切なリアプノフ関数を設計する一般的な手法は存在しない。この定理は、時変な非線形システムや遅延を伴うシステムなどにも拡張されている^{4,5)}。

1-3-4 周期解, フロケ理論

(執筆者: 中島弘之)[2009年3月受領]

常微分方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ の解のうち、任意の時刻 t において $\bar{x}(t) = \bar{x}(t+T)$ を満たすものを周期解と呼ぶ。ここで、 $T > 0$ であり、この関係を満たす最小の T を $\bar{x}(t)$ の周期という。 T が 0 の場合も含めれば、平衡点 (不動点) も周期解の一種 (周期 $T = 0$ の周期解) である。常微分方程式が自律系の場合は、それが定義する連続時間力学系の相空間上での周期解の軌道を周期軌道と呼ぶ。周期軌道は単一閉曲線を描き、コンパクトな不変集合となる。

周期解の安定性としては、軌道安定性と呼ばれる以下のような定義が通常は採用されている。すなわち、周期 T の周期解 $\bar{x}(t)$ に対して $C = \cup_{0 \leq t \leq T} \bar{x}(t)$ として、任意の正数 ϵ に対し、正数 δ が存在し、 C の δ 近傍の任意の点を任意の時刻 τ に出発する解が任意の時刻 $t \geq \tau$ において C の ϵ 近傍に含まれるとき、 $x(t)$ は (軌道) 安定であるとする。更に、 C のある近傍 V 内の任意の点 x に対し、任意の時刻 τ に x を出発する解が時間経過とともに C に漸近する場合、周期解 $\bar{x}(t)$ は漸近軌道安定であるという。

周期軌道 $\bar{x}(t)$ の安定判別には、平衡点の場合と同様に、解軌道の周りで線形化した変分方程式が使用される。すなわち、 $x = \bar{x}(t)$ における f のヤコビ行列を $A(t) = Df(\bar{x}(t))$ とし、変分方程式 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ の零解 $x = \mathbf{0}$ の安定性によって $\bar{x}(t)$ の安定性を判別する。この変分方程式は周期 T の周期係数線形方程式であるから、安定判別には以下に述べるフロケの理論が適用できる。

周期 T の周期係数行列 $A(t)$ で定義される n 次元周期係数線形常微分方程式 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ の基本行列解 (n 個の独立な解を列ベクトルに持つ行列値関数) $X(t)$ に対して $X(t+T)$ も基本行列解であり、 $X(t+T) = X(t)S$ となる正則行列 (基礎行列) S が存在する。また、 $S = e^{TR}$ となる正方行列 R 及び t に関して周期 T をもつ正方行列 $P(t)$ によって基本行列解は $X(t) = P(t)e^{tR}$ と表わせる。ここで、変数変換 $y(t) = P(t)^{-1}x(t)$ を施すと、 y は定係数線形方程式 $\dot{y} = Ry$ に従う。 S の固有値 λ を特性乗数 (フロケ乗数)、 R の固有値 $\mu = (1/T) \ln \lambda$ を特性指数 (フロケ指数) と呼ぶ。すべての特性乗数の絶対値が 1 未満 (特性指数の実部が負) であれば、零解は (Lyapunov の意味で) 漸近安定になる。

さて、 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ が、方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ の周期軌道 $\bar{x}(t)$ の周りで線形化した変分方程式である場合、すべての特性乗数の絶対値が 1 未満であれば $\bar{x}(t)$ の漸近安定性が保証される。 $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ が自律系の場合は、特性乗数の一つは必ず絶対値が 1 になることに注意を要するが、この場合も、残りの $n-1$ 個の特性乗数の絶対値が 1 未満であれば $\bar{x}(t)$ は軌道漸近安定となる。また、変分方程式とフロケの理論に基づく安定判別は、自律系のポアンカレ写像あるいは非自律系のストロボ写像の線形化に基づく安定判別と等価である。

1-3-5 概周期解

(執筆者：中島弘之)[2009年3月受領]

常微分方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ の解のうち、H. Bohr の意味で概周期的であるものを概周期解と呼び、自律系においては相空間上でのその軌道を概周期軌道と呼ぶ。ここで、 $x(t)$ が概周期的であるとは、任意の正数 ϵ に対し、集合 $T(\epsilon) = \{\tau \in \mathbf{R} : \|x(t+\tau) - x(t)\| \leq \epsilon (\forall t \in \mathbf{R})\}$ が \mathbf{R} 上で相対的に密であること、すなわち、正数 $L(\epsilon)$ があって、任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $T(\epsilon) \cap [t, t+L(\epsilon)] \neq \emptyset$ となることであると定義されている⁶⁾。

直感的には、軌道上のすべての状態は誤差 ϵ の範囲で必ず帰帰し、それに要する時間 $L(\epsilon)$ が時間的に一様であるという意味で、「概ね周期的な」解であることを、この定義は表現している。真に周期的な解については、その周期を T とすると、任意の ϵ について $L(\epsilon) = T$ が上述の条件を満たす。すなわち、周期解は概周期解である。

周期解以外の概周期解で典型的なものは、無理数比をもつ複数次（有限個）の周波数成分を含む解であり、準周期解（quasi-periodic solution）と呼ばれる。準周期解の相空間上での軌道は閉じることなく、二次元以上のトーラス（円環面）を稠密（ちゆうみつ）に埋め尽くす。準周期解は強制自励振動系や天体の運動などに見られる重要な振動現象を表現しており、工学・物理学では概周期解と準周期解とは同義として扱われることも多い。

概周期解は一般に非周期的であるが、同じく非周期的であるカオス解とは次の点で異なった性質をもつ。すなわち、概周期軌道の閉包は極小集合（閉かつ不変な部分集合を含まない閉不変集合）であるが、カオス軌道の閉包は極小集合ではない（不安定周期軌道を含む）。カオスの定義自体が厳密には確定していないが、不安定周期軌道の存在はカオスにとって本質的な性質の一つである。このように、カオス解と概周期解とは本質的な面で異なっているのである。

参考文献

- 1) 川上博, “非線形現象,”
<http://cms.db.tokushima-u.ac.jp/DAV/person/S10723/LectureNote/2007/NonlinearPhenomena.pdf>, 2005.
- 2) C. Mira, “Chaotic Dynamics,” World Scientific, Singapore, 1987.
- 3) 平井一正, “非線形制御,” コロナ社, 2003.
- 4) H.K. Khalil, “Nonlinear systems,” Prentice Hall, 2001.
- 5) J.K. Hale and S.M.V. Lunel, “Introduction to functional differential equations,” Springer, 1993.
- 6) A.M. Fink, “Almost Periodic Differential Equations,” Springer-Verlag, 1974.

1 群 - 11 編 - 1 章

1-4 非線形現象

1-4-1 同期・引込み現象

(執筆者：遠藤哲朗)[2009年2月受領]

同期・引込み現象を最初に発見したのはオランダの科学者、クリスチャン・ホイヘンス(1629-1695)で、彼は周期と位相の少し異なる二つの振り子時計を同じ板の上に固定したときに、二つの振り子の周期と位相が揃う現象を見いだした¹⁾。一般に同期とは複数の発振器(振動子)が結合された系において、本来ばらばらであった個々の系に生ずる発振の周波数が結合による相互作用の結果、整数比となり、かつ、位相差が一定で定常状態となる現象をいい²⁾、電気回路や生態系など広く一般に観察される。入力周波数に対する出力周波数の比が1以上なら倍周期同期、1以下なら分周同期という。このような同期の性質は、周波数の変換に利用することができる。例えば、マイクロ波などの発振器の周波数安定化の一手法として、比較的周波数の低い安定した周波数をもつ小出力の発振器を用い、これと同期した、より高い周波数をもつ大出力の発振器の発振周波数を安定化するなどの方法が実際に行われている³⁾。一方、引込み現象¹⁾とは、同期現象とほぼ同じ意味に使われるが、他の発振器の影響により自身の発振周波数が変化するという点に注目した用語である。引込み現象には、発振器に外部から強制的な周期的入力があるとき、発振器の自然周波数が外部入力の周波数に一致して(すなわち、引き込まれて)しまう強制引込みと、発振器が互いに周波数をずらして一致する相互引込みとがある。強制引込みは、注入する(出力の大きい)発振器の周波数が注入を受ける(相対的に出力の小さい)発振器の周波数の近傍にあるときに発生し、水晶発振回路では、発振器のQを高めて周波数を安定化させるために強制引込みがしばしば用いられる。同期・引込み現象は、全く異なる振動子間や、非常に多数の振動子間にも現れる一種の自己組織化現象と考えることもできる。

1-4-2 共鳴現象

(執筆者：遠藤哲朗)[2009年2月受領]

共振回路や発振器のような力学系において周期外力が印加された場合、外力の周波数が系の固有周波数に接近したとき、力学系の振幅が急激に増加する現象がみられる²⁾。これを共鳴または共振という。振幅の増加は系のQ値が高いほど著しい。共鳴は線形、非線形にかかわらず生ずるが、線形の場合は共振曲線は対称形をしており、外力の周波数を共振点(=固有周波数)よりも低い方から共振点に近づけても、高いほうから近づけても系は共振点において最大振幅を示し、そこから離れると次第に振幅が減少するという性質をもつ。一方、ダフティング方程式⁴⁾で表されるような非線形共振回路をもつ系の場合、共振曲線は図1-4に示すように頂点が右(もしくは左に)ずれたかたちをしており、その結果、外力の周波数を共振点より低い方から共振点に近づけた場合と、高い方から近づけた場合では大きな違いが現れる。すなわち、図1-4の場合、低い方から共振点に近づけた場合、系の振幅は次第に増加し、最大値に達したあと急激に減少する(図中のAのルート)。次に、高い方から近づけた場合、振幅は小振幅のまま、次第に増加するが、臨界点に達すると急激に増大する(図中Bのルート)。このように外力周波数を増加させた場合と減少させた場合でルートの異なる現象をヒステリシス現象、振幅が不連続的に増加または減少する現象をジャンプ現象といい、非線形の共振回路に特有の現象として知られている。このようなジャンプ現象、ヒステリシス

現象は、社会現象、経済現象などでも広くみられ、これらの現象も非線形な共振現象の一種として考えることができる。

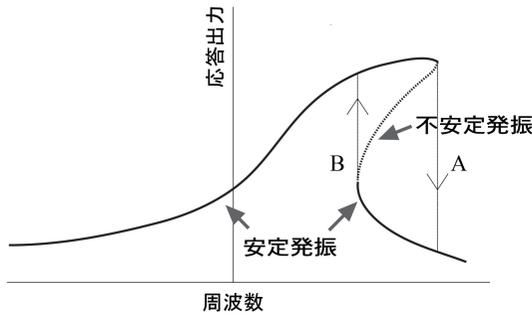


図 1-4 ダフィング方程式の共振特性

1-4-3 分岐現象

(執筆者：北島博之)[2009年3月受領]

力学系に含まれるパラメータの変動に対して、解の定性的性質が変化する現象を分岐 (bifurcation) という。局所分岐 (local bifurcation) と大域分岐 (global bifurcation) に分類される。前者は平衡点や周期点の周りで線形化することにより得られる線形化方程式のヤコビ行列の固有値により発生条件が決まる。平衡点では固有値が 0 と純虚数の点においてそれぞれサドルノード分岐 (saddle-node bifurcation) と Hopf 分岐が起こる。周期点では、固有値が -1 、 1 、それ以外の絶対値が 1 でそれぞれ、周期倍分岐 (period-doubling bifurcation)、サドルノード分岐、Neimark-Sacker 分岐が起こる。系に含まれる対称性の条件を加えることにより、サドルノード分岐の他にピッチフォーク分岐 (pitchfork bifurcation) またはトランスクリティカル分岐 (transcritical bifurcation) の発生条件を記述できる。分岐によって安定な解が発生する場合にはスーパークリティカル (supercritical)、不安定な解が発生する場合はサブクリティカル (subcritical) と呼ぶ。

大域分岐については、同じ周期解の安定多様体と不安定多様体がループになっている場合をセパトリスループ (separatrix loop)、異なる周期解の安定多様体と不安定多様体が繋がっている場合をサドルコネクション (saddle connection) があるという。これらはパラメータの変動やベクトル場の摂動に関して壊れやすい性質をもっている。非自律系においては、周期解の安定多様体と不安定多様体とが交差することが許される。同じ周期解の安定多様体と不安定多様体とが交わる場合をホモクリニック分岐 (homoclinic bifurcation)、異なる周期解の安定多様体と不安定多様体とが交わる場合をヘテロクリニック分岐 (heteroclinic bifurcation) という。そのような構造をもつ周期解を 2 重漸近点 (doubly asymptotic point) という。

1-4-4 構造安定性

(執筆者：薄 良彦)[2009年3月受領]

電子・情報・通信分野の対象となる工学システムや物理・生体システムを解析する場合、通常その特性を記述する数式モデルが求められる。特に動特性を記述する場合には微分方程式 (力学系) が用いられる。このとき、微分方程式の解により解析対象の動特性をうまく表

現 (近似) することが期待される。ここで、数式モデルを求める場合にシステムの静特性を数式により近似することは避けられない。また、実用に供されているシステムを特徴づけるパラメータは通常、近似値であるため、数式モデルの解は動特性のあくまで近似に過ぎない。このような場合に数式モデルが対象となる実在のシステムの動特性を近似できるか否かを検討することは重要であり、数学的観点から構造安定性 (structural stability) の問題が提起され、力学系理論の創世記以降、精力的に研究されている。

構造安定性とは、ある相空間に定義される力学系 (微分方程式) の集合を考えたとき、その集合に含まれる力学系が (集合内の) その近傍に存在する力学系と位相共役の関係にある場合に、その力学系が構造安定であるという⁵⁾。このように、構造安定性はシステムの動特性を記述する数式モデルの定性的性質に関連している。力学系理論においては、構造安定性に関連しモース・スモール系や公理 A 力学系などが研究されてきた。

1-4-5 初期値領域

(執筆者: 薄 良彦) [2009年3月受領]

力学系を用いて工学システムや物理・生体システムの解析を行う場合に初期値の概念は重要である。これは、初期時刻におけるシステムの動作点に依存して、対応する初期値から出発した力学系の挙動が定性的に異なりうるためである。位相同期回路や電力システム、磁気浮上システムの安定問題において上記の重要性が認識されてきた。このとき、ある定常状態に至る初期値の集合を調べておくことは、元のシステムの初期動作点によらない大域的な動特性の理解を可能にし、システムの制御を考える場合に重要であり、数学的観点から初期値領域 (region of initial conditions) の問題が提起され、理論的・数值的に研究されている。

初期値領域に関して重要な引込み領域 (basin of attraction) について説明する。力学系 (リアプノフの意味で漸近) 安定な平衡点の引込み領域とは、平衡点に収束するような相空間内の開集合のことをいう⁶⁾。一般的な非線形力学系では、複数の安定平衡点や安定周期解、あるいはカオスアトラクタの引込み領域を上記と同様に考えることができ、これらの領域は共存しうる。よって、複数の引込み領域間の境界 (引込み境界: basin boundary) を検討することがシステムの挙動の理解に重要となる。引込み境界はスムーズな場合とフラクタル状の場合があり、フラクタル状境界ではその発生機構に大域分岐現象やホモクリニック・タングルなどが関与し、非線形力学系の大域構造の興味深い内容を含み重要である。

参考文献

- 1) スティーブン・ストロガッツ著、蔵本由紀監修、長尾力訳、“SYNC: なぜ自然はシンクロしたがるのか,” 早川書房, 2005.
- 2) 理化学辞典, 第4版, 岩波書店, 1987.
- 3) R.C. Mackey, “Injection locking of klystron oscillator,” IRE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.MTT-10, no.7, p.228, 1962.
- 4) J.M.T. Thompson and H.B. Stewart, “Nonlinear dynamics and chaos,” John Wiley and Sons, 1986.
- 5) 数学的導入としては C. Pugh and M.M. Peixoto, “Structural Stability,” Scholarpedia, vol.3, no.9, p.4008, 2008.
- 6) 物理的導入としては E. Ott, “Basin of attraction,” Scholarpedia, vol.1, no.8, p.1701, 2006.