

1 群 (信号・システム) - 11 編 (非線形問題)

3 章 様々な非線形問題

(執筆者:)

概要

【本章の構成】

1 群 - 11 編 - 3 章

3-1 非線形解析

3-1-1 非線形回路解析

(執筆者：丹治裕一，山村清隆)[2009年6月受領]

非線形回路の解析手法及びこれらを基に開発された回路シミュレータの集積回路の発展に果たしてきた役割は非常に大きい。現在では、集積回路及び周辺設計の様々な段階で、回路シミュレータが使用されている。現在の回路シミュレータのほとんどが、1972年にペダーソンらによって開発された SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) に基づいている。SPICE では、半導体デバイスを数式モデルで表現し、修正節点解析法¹⁾を用いて回路網を定式化、様々な非線形数値解析アルゴリズムを用いることで、設計者に有用な情報を与えている。この節では、回路シミュレータの主要な機能である直流解析、過渡解析、定常解析についてその概要を述べる。本分野及び関連の話題は、文献 2) を参考にされたい。

非線形回路網を修正節点解析法で記述すると以下のように表される。

$$Gx + C(x) \frac{dx}{dt} + f(x) = J(t) \quad (3.1)$$

ここで、各行列、ベクトルは、

$$x(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} N & A \\ -A^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad C(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H(x) \end{bmatrix}$$

であり、 $v(t)$ 及び $i(t)$ は、それぞれ、節点電圧、インダクタ、独立電圧源などの枝電流、 N 及び A は、それぞれ、節点コンダクタンス行列、インシデント行列、 $Q(x)$ 及び $H(x)$ は、それぞれ、キャパシタンス、インダクタンス行列、 $f(x)$ は非線形特性、 $J(t)$ は強制入力、 t は時間を表している。修正節点解析法はあらゆる種類の回路網に対応しており、ネットリストと呼ばれる回路網のテキスト記述から、式 (3.1) の係数行列を作成することも容易である。したがって、修正節点解析法は、回路シミュレータの構成に最も適した解析手法である。

(1) 直流解析

電子回路は通常、直流電源及び交流電源を有する。回路網の過渡解析を行うためには、回路網の初期値が必要となるが、これを得るには、直流電源を与えた場合の定常値（回路理論では動作点、非線形理論では平衡点）が必要である。また、回路網のマクロモデリングでは、直流特性が必要である。回路シミュレータでは、回路網の直流特性を調べる機能は直流解析と呼ばれている。

直流解析では、式 (3.1) の時間微分項を消去して、以下の非線形方程式が解かれる。

$$Gx + f(x) = J_0 \quad (3.2)$$

ここで、 J_0 は直流の強制入力を表している。式 (3.2) の求解には、式 (3.2) を一次のテイラー展開を用いて、非線形方程式を線形化して解くニュートン・ラフソン法が用いられる³⁾。 $j+1$ 番目の反復解 x^{j+1} は以下のように書くことができる。

$$x^{j+1} = x^j - \left[\frac{\partial \{Gx + f(x)\}}{\partial x} \Big|_{x=x^j} \right]^{-1} \{Gx^j + f(x^j) - J_0\} \quad (3.3)$$

ニュートン・ラフソン法の魅力の一つに、その優れた局所的収束性がある。すなわち、初期値 x^0 を解 x^* の十分近くに選べば、式 (3.3) により生成される反復解の列 $\{x^j\}$ は x^* に二次収束する。ここで二次収束とは、一反復ごとに反復解の誤差が 2 乗のオーダーで小さくなっていくことをいう。しかし初期値が解から離れている場合は収束の保証がなく、収束しないこともしばしばある。

ニュートン・ラフソン法のように初期値を解の近くに選ばないと収束の保証がない方法を大域的収束性がないという。逆に任意の初期値から必ず解に収束する方法、もしくは解に収束するような初期値を事前に選べる方法を大域的収束性があるという。

大域的収束性を保証する方法としてホモトピー法が知られている^{3,4)}。ホモトピー法とは、既知解 x^0 をもつ補助方程式を解きたい方程式 (3.2) へと連続的に変形し、その結果生ずる「 x^0 と x^* を結ぶ解曲線」を x^0 から出発して追跡することにより解 x^* を求める方法である。そのような解曲線の追跡法としては弧長法³⁾、球面法⁴⁾、解曲線追跡回路による方法³⁾などが知られている。また修正節点方程式に対してはホモトピー法は大域的収束性をもつことが証明されており⁵⁾、理論面・実用面での有効性が確認されている⁴⁾。

(2) 過渡解析

過渡解析は回路シミュレータの機能として最も使用頻度が高い。過渡解析では、式 (3.1) を離散化し、各時刻での応答を求める。離散化には数値積分法が用いられる。非線形回路にはダイオード、トランジスタなど強非線形性を有する素子が含まれるため、解析される系はスティフとなる。それゆえ、スティフな系においても解析が可能なように、後退オイラー法、台形公式、Gear 法などの陰的数値積分法を用いる³⁾。

例えば、式 (3.1) に後退オイラー法を用いると以下が得られる。

$$Gx_n + C(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{h} + f(x_n) = J_n \quad (3.4)$$

ここで、添え字 n は時刻 t_n を意味し、 $h = t_n - t_{n-1}$ は時間刻み幅を表している。式 (3.4) は明らかに非線形代数方程式であり、直流解析と同様、求解にはニュートン・ラフソン法が用いられる。ニュートン・ラフソン法が収束しない場合及び前時刻よりの変化量が大きい場合には、時間刻み幅 h を小さくとり、再度、非線形代数方程式の求解を行う。

(3) 定常解析

回路網の定常応答を求めるには、ある時刻とその 1 周期後の応答が等しくなるまで過渡解析を実行すればよい。しかしながら、通信、パワーエレクトロニクス用の回路では、定常状態に到達するまでには非常に長い時間を必要とする。そのため、過渡解析に基づく方法では定常応答を求めることが困難な場合がある。そこで、定常解析を効率良く行う方法が検討され、これに基づいた回路シミュレータが開発されている。

定常応答を求める方法は、時間領域における方法と周波数領域における方法に大別される。時間領域における方法はシューティング法と呼ばれ、周波数領域における方法は調波平衡法と呼ばれている。周期定常解の概略は、図 3.1 のように示される。すなわち、

$$F(x(0)) = x(0) - x(T) = 0 \quad (3.5)$$

を満たすような初期値 $x(0)$ が得られれば、定常応答は式 (3.4) の過渡解析を実行することで求めることができる。初期値 $x(0)$ を求めるために、式 (3.5) にニュートン・ラフソン法を適

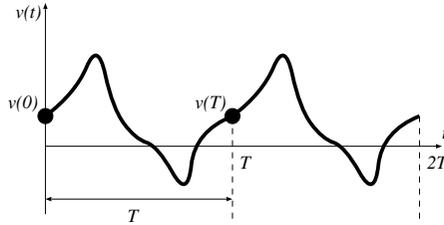


図 3-1 強制振動系における定常周期解の概略図

用する．ここで、 $x(T)$ 及びヤコビ行列を求めるために、過渡解析が複数回、必要となる³⁾．一方、調波平衡法では応答 $x(t)$ をフーリエ級数:

$$x(t) = X_0 + \sum_{i=1}^M (X_{2m-1} \cos k\omega t + X_{2m} \sin k\omega t) \quad (3\cdot6)$$

で近似する．式 (3-6) を式 (3-1) に代入し、各周波数成分ごとと評価すると、フーリエ係数 $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{2M-1}, X_{2M}$ に関する $(2M+1) \times N$ 次元 (回路網の次元を N とする) の非線形代数方程式が得られ、これをニュートン・ラフソン法で解くことにより定常応答式 (3-6) を求める．ここで、ヤコビ行列は、高速フーリエ変換を利用することで効率良く作成することができる．また、調波平衡法ではニュートン・ラフソン法において、大規模な線形連立方程式の解法が必要となるため、反復解法により演算効率を改善する⁶⁾．

時間領域、周波数領域、いずれの方法が優れているかは回路に依存するため、両方法の併用を考える必要がある．

3-1-2 精度保証付き計算

(執筆中)

参考文献

- 1) C.-W. Ho, A.E. Ruehli, and P.A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.CAS-22, no.6, pp.504-509, 1975.
- 2) 浅井秀樹, 渡邊貴之, "電子回路シミュレーション技法," 科学技術出版, 2002.
- 3) 牛田明夫, 田中 衛, "電子回路シミュレーション," コロナ社, 2002.
- 4) 山村清隆, "理論が実用になるまで," 信学誌, vol.81, no.1, pp.33-36, 1998.
- 5) K. Yamamura, T. Sekiguchi, and Y. Inoue, "A fixed-point homotopy method for solving modified nodal equations," IEEE Trans. Circuits and Systems I, vol.46, no.6, pp.654-665, 1999.
- 6) Y. Saad, "Iterative methods for sparse linear systems," SIAM, 2004.

1 群 - 11 編 - 3 章

3-2 複雑ネットワーク

(執筆者：木村貴幸・池口 徹)[2010年5月受領]

ニューラルネットワーク、インターネット、World Wide Web など、実世界には様々なネットワークがある。これらをグラフを用いてモデル化し、そのネットワークの構造的特徴を解析することにより、例えば、神経回路網の形成過程の解明、情報混雑・攻撃などを抑えるコンピュータネットワークの構築など、種々の工学的応用が実現できる。本節では、まず始めに、グラフについて述べる。また、近年提案された、スモールワールドネットワーク、スケールフリーネットワークなどに代表される複雑ネットワークについて述べる。

3-2-1 グラフ

(1) グラフの定義

$G = (N, \mathcal{L})$ で表される図形をグラフという。ここで $N \equiv \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_N\}$ はグラフ G におけるノード集合（または頂点集合）であり、 $\mathcal{L} \equiv \{l_1, l_2, l_3, \dots, l_K\}$ はリンク集合（または枝集合）である。 $N \equiv |N|$ と $K \equiv |\mathcal{L}|$ はそれぞれ、ノードとリンクの総数である。

グラフ G は $N \times N$ の隣接行列 \mathcal{A} を用いて表現される場合が多い。隣接行列 \mathcal{A} の ij 成分 a_{ij} は、0 または 1 の値をとる。ノード i とノード j が隣接していない場合 $a_{ij} = 0$ となり、ノード i とノード j が隣接している場合 $a_{ij} = 1$ となる。グラフの一例を図 3-2 に示す。

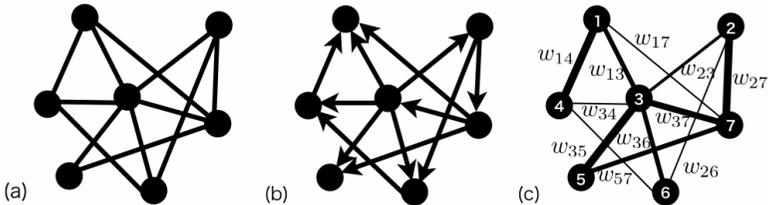


図 3-2 $N = 7, \mathcal{L} = 12$ のグラフの一例。(a) 無向グラフ (b) 有向グラフ (c) 重み付き無効グラフ。 w_{ij} はノード ij 間の結合重みを表す。また、リンクの結合重みを、リンクの太さとして表現している。

(2) 次数、部分グラフ、経路

グラフ G において、ノード i の次数 k_i は、 $k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ で定義される。有向グラフの場合、ノード i の次数は、入次数 $k_i^{in} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ と出次数 $k_i^{out} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ の和 $k_i = k_i^{in} + k_i^{out}$ となる。部分グラフ $G' = (N', \mathcal{L}')$ とは、 $N' \subseteq N$ かつ $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ となるグラフのことである。ノード ij 間におけるグラフ G の道 (walk) とは、ノード i から出発し、ノード j で終了するノードとリンクの列である。このとき、リンクの重複を許さない道のことを、ノード ij 間の路 (trail) と呼び、頂点の重複を許さない道のことを、ノード ij 間の径 (path) と呼ぶ。したがって、リンクとノードの重複を許さないノード i からノード j までの道を、ノード ij 間の経路と呼ぶ。

(3) ネットワーク

グラフの頂点や枝に対して物理的な量を与えることにより、グラフからネットワークが形成される¹⁾。例えば、ノードを人と考え、リンクをそれらの友人関係と見なすことにより、友人関係のネットワークが構成される。また、インターネットの場合、各ルータをノードとみ

なし、それらルータ間の情報伝送路をリンクと見なすことにより、インターネットのネットワークが形成される。

3-2-2 スモールワールドネットワーク

(1) 平均頂点間距離

ネットワークの平均頂点間距離 L は次式で定義される^{2,3)}。

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} \quad (3.7)$$

式(3.7)において、 d_{ij} はノード i とノード j 間の最短距離である。Dijkstra アルゴリズムや幅優先探索⁴⁾などの最短経路探索アルゴリズムを用いることにより、ノード間の最短距離が求まる。ネットワークにおける d_{ij} の最大値をネットワークの直径 (diameter) という。平均頂点間距離は、インターネットにおけるパケット送信⁵⁾や、ネットワークの内部構造を特徴づける指標^{6,7)}として重要な値となる。

ネットワークが結合していない場合、ノード ij 間の経路が存在せず、 d_{ij} の値が発散してしまう問題があるが、この問題を対処する方法として、式(3.7)の総和の最大値を決めること³⁾や、距離についての調和平均を取る方法⁸⁾、または、Efficiency グラフを用いる方法などが提案されている^{9,10)}。

(2) クラスタ係数

ネットワークのクラスタ係数 C は次式で定義される。

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i \quad (3.8)$$

ここで、

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N a_{ij} a_{jm} a_{mi}}{k_i(k_i - 1)} \quad (3.9)$$

友人関係のネットワークであれば、自分と共通の友人達が、それぞれ友人であるかどうかというノード間の局所的な結合の強さを表すのがクラスタ係数である⁶⁾。

ネットワークのクラスタ係数を求める他の手法として、 k 近傍を求める方法¹¹⁾や、ネットワーク内のサイクルを求める方法¹²⁾などが提案されている。また、有向ネットワークにおけるクラスタ係数を求める方法¹³⁾なども提案されている。

(3) 実ネットワークの構造的特徴

実際に存在する実ネットワークについて、ノード数 N 、平均頂点間距離 L 、クラスタ係数 C 、べき指数 γ をまとめたものを表 3.1 に示す。べき指数 γ については 3-2-3 節で述べる。

表 3.1 から、ネットワークのノード数に違いはあるが、各ネットワークとも平均頂点間距離 L が小さくなることが確認できる。形状が規則的なネットワークの場合、その規則性から平均頂点間距離 L とクラスタ係数 C はそれぞれ共に大きな値をとる。ランダムネットワーク

の場合、ネットワーク内には数多くのショートカットが存在し、したがって平均頂点間距離 L は小さくなる。また、結合のランダム性から、クラスタ係数 C の値も小さくなる。しかし、表 3・1 から、実ネットワークの多くは、平均頂点間距離 L は小さくかつクラスタ係数 C の値が大きくなっていることが分かる。実ネットワークの平均頂点間距離 L は、 $L \propto \log N$ となることが報告されている^{2,3)}。また、Milgram が行った実験¹⁴⁾では、知人関係を表すネットワークの平均頂点間距離 L は、 $L \sim 6$ となることが報告されている。

表 3・1 実ネットワークの構造的特徴

実ネットワーク名	ノード数 N	平均頂点間距離 L	クラスタ係数 C	ベキ指数 γ
As 2001	11, 174	3.62	0.24	2.38
Gnutella	709	4.3	0.014	2.19
WWW	$\sim 2 \times 10^8$	16	0.11	2.1/2.7
Protein	2, 115	2.12	0.07	2.4
Metabolic	778	7.40	0.7	2.2/2.1
Math1999	57, 516	8.46	0.15	2.47
Actors	225, 226	3.65	0.79	2.3

実ネットワークはそれぞれ、AS2001; 2001 年のインターネットにおける AS(Autonomous System)¹⁵⁾, Gnutella; Peer-to-Peer ネットワーク¹⁶⁾, WWW; World Wide Web¹⁷⁾, Protein; タンパク質間相互作用ネットワーク¹⁸⁾, Metabolic; 代謝反応ネットワーク¹⁹⁾, Math1999; 学術論文における共著者関係ネットワーク²⁰⁾, Actors; 映画における共演関係ネットワーク^{3, 21)}. WWW と Metabolic は有向ネットワークのため、入次数、出次数のそれぞれの順でベキ指数 γ の値を記載している。

(4) スモールワールドネットワークの作成方法

前節で述べたように、実ネットワークは、平均頂点間距離 L が小さく、かつ、クラスタ係数 C が大きくなることが明らかとなった。1998 年、D. J. Watts と S. Strogatz は、平均頂点間距離が小さくかつクラスタ係数が大きいスモールワールド構造を有する、スモールワールドネットワーク (WS モデル) を提案した³⁾。WS モデルは、下記の手順を用いて作成される。

1. 円環上にノードを N 個配置する。このとき、各ノードは k 個の次数 (k は偶数) をもつ。ノード i ($i = 1, \dots, N$) について、左隣と右隣に対してそれぞれ、頂点 i から $k/2$ 個離れたノードと頂点 i をつなぐ。
2. ネットワーク内の $kN/2$ 本のリンクに対して、枝交換確率 p を導入し、つなぎ替えを行うリンク $pkN/2$ 本を決定する。選択されたリンクに対して、どちらの頂点を切り離すかを $1/2$ の確率を用いて決定する。
3. 枝の新しいつなぎ先をランダムに決定する。

WS モデル以外の方法として、リンクを追加することによりスモールワールドネットワークを作成する方法^{22, 23)} などが提案されている。枝交換確率 p を変化させた場合の、平均頂点間距離 L とクラスタ係数 C の結果を図 3・3 に示す。図 3・3 から、枝交換確率 p が少しでも 0 より大きくなると、平均頂点間距離 L が小さくなることが分かる。これに対して、クラス

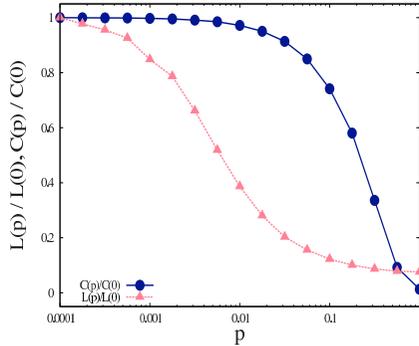


図 3-3 枝交換確率 p を変化させた場合の平均頂点間距離 $L(p)$ とクラスター係数 $C(p)$.

タ係数 C は高い値を保っている．表 3-1 から，実ネットワークの多くは，平均頂点間距離 L が小さくかつクラスター係数 C が大きくなることを既に述べた．したがって，規則的なネットワーク ($p = 0$) やランダムネットワーク ($p = 1$) とは異なり，枝交換確率 $0 < p < 1$ の場合，作成されたネットワークは，実ネットワークと同様にスモールワールド構造を持っていることが分かる．スモールワールド現象の発生については，文献 23, 24) で詳しく解析されている．

3-2-3 スケールフリーネットワーク

(1) 次数分布

ネットワークにおける次数分布 $P(k)$ は，ネットワーク内のあるノードが k 個の次数をもつ確率によって定義される．有向ネットワークの場合，次数分布はそれぞれ，入次数の次数分布 $P(k^{in})$ と出次数の次数分布 $P(k^{out})$ によって定義される．ネットワークにおいて，その次数分布がどうなるかを見るには，すべての次数 k について，その次数分布 $P(k)$ をプロットすればよい．

(2) スケールフリー特性

ネットワークの形状が規則的やランダムの場合，その次数分布 $P(k)$ は二項分布またはポアソン分布に従う^{25, 26)}．しかし，現実のネットワークの多くは，その次数分布 $P(k)$ がべき分布，すなわち， $P(k) \sim k^{-\gamma}$ となることが知られている．実際，表 3-1 から，ネットワークのべき指数 γ は， $2 < \gamma < 3$ となることが分かる．このように，次数分布がべき則となるネットワークをスケールフリーネットワークという^{27, 28)}．ネットワークにおける相転移²⁹⁾ やフラクタル構造³⁰⁾ に対して，べき則は重要な役割をもつことが知られている．

(3) スケールフリーネットワークの作成方法

1999 年，R. Albert と A.-L. Barabási は，優先的選択とネットワークの成長という二つの要素を融合させた，スケールフリーネットワークモデル (BA モデル) を提案した^{27, 28)}．BA モデルは下記の手段を用いて実現される．

1. 初期ノード数 m_0 を決定し， m_0 個のノードから構成された完全グラフを作成する．

2. 各ステップ t ($t = 1, 2, 3, \dots, N - m_0$) において, m 本のリンクをもつノードを新たに追加する. このとき, 新たに追加するノードの j ($j = 1, \dots, m$) 番目のリンクを, ネットワーク内に既に存在しているノードに結合させるために, 次式で定義される優先度確率を用いて, 結合させるノード i を決定する.

$$\prod_{j \rightarrow i} = \frac{k_i}{\sum_{l=1}^{N_i} k_l} \quad (3 \cdot 10)$$

式 (3・10) において, k_i はノード i の次数, N_i はノード i の隣接ノード数である. 上記の手順を用いて作成された $N = 10^2$ の BA モデル, 及び $N = 10^5$ の BA モデルにおける累積次数分布を図 3・4 に示す. 図 3・4 (右図) から, BA モデルにおける次数分布 $P(k)$ はベキ分布に従っていることが分かる.

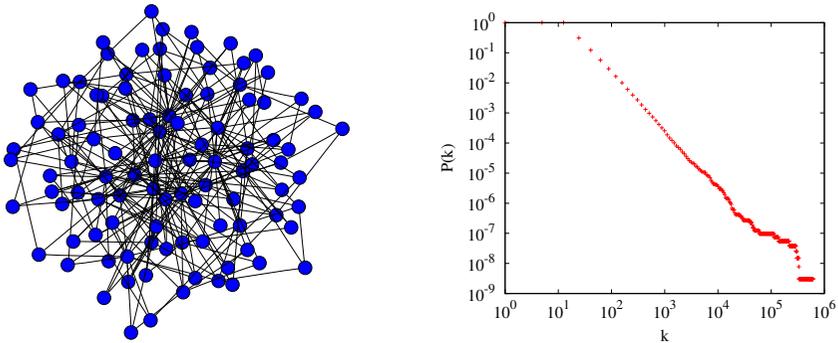


図 3・4 BA モデル ($N = 10^2, m_0 = 4, m = 3$) の一例 (左) と, $N = 10^5$ における累積次数分布 (右).

$t = \infty$ とした場合, BA モデルのべき指数 γ は $\gamma = 3$ となる. 平均場近似^{28,31)} や, マスター方程式³²⁾ などを用いることにより, BA モデルにおけるべき則は導出される. 特に, べき則の導出過程に関しては増田ら³³⁾の解析が詳しい. 有向なスケールフリーネットワークの作成方法は Kravivsky らによって提案されている³⁴⁾. また, 種々の γ 値を有するスケールフリーネットワークを作成させるために, BA モデルを改良した作成アルゴリズムが提案されている. 例えば, 線形優先的選択 (linear preferential attachment)³²⁾ や非線形優先的選択 (nonlinear preferential attachment)³⁴⁾ を用いた作成方法, または, 既存ノードにおける情報の減衰性 (より新しいノードほど高い結合確率を有すること) などが導入された作成アルゴリズム³⁵⁾ などが提案されている. そのほかの作成アルゴリズムについては, 複雑ネットワークのレビュー論文^{36,37)} や学術書^{5,38,33,39)}などを参照されたい.

参考文献

- 1) D.B. West, "Introduction to Graph Theory," Prentice-Hall, 1996.
- 2) D.J. Watts, "Small Worlds," Princeton University Press, 1999.

- 3) D.J. Watts and S. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-world' networks," *Nature*, vol.393, pp.440-442, 1998.
- 4) T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, and C. Stein, "Introduction to Algorithms," MIT University Press, Cambridge, 2001.
- 5) R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, "Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach," Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- 6) S. Wasserman and K. Faust, "Social Network Analysis," Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- 7) J. Scott, "Social Network Analysis: A Handbook, 2nd ed.," Sage Publications, London, 2000.
- 8) M. Marchiori and V. Latora, "Harmony in the small-world," *PhysicaA*, vol.285, pp.539-546, 2000.
- 9) V. Latora and M. Marchiori, "Efficient Behavior of Small-World Networks," *Physical Review Letters*, vol.87, 198701, 2001.
- 10) V. Latora and M. Marchiori, "Economic small-world behavior in weighted networks," *European Physical Journal B*, vol.32, pp.249-263, 2003.
- 11) A. Fronczak, J.A. Hoyst, M. Jedynak, and J. Sienkiewicz, "Higher order clustering coefficients in Barabási-Albert networks," *Physica A*, vol.316, pp.688-694, 2002.
- 12) G. Bianconi and A. Capocci, "Number of Loops of Size h in Growing Scale-Free Networks," *Physical Review Letters*, vol.90, 078701, 2003.
- 13) S. Wasserman, "Random directed graph distributions and the triad census in social networks," *Journal of Mathematical Sociology*, vol.5, pp.61-86, 1977.
- 14) S. Milgram, "The Small-world Problem," *Psychology Today*, vol.1, pp.60-67, 1967.
- 15) R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani, "Dynamical and Correlation Properties of the Internet," *Physical Review Letters*, vol.87, 258701, 2001.
- 16) A. Vázquez, "Growing network with local rules: Preferential attachment, clustering hierarchy, and degree correlations," *Physical Review E*, vol.67, 056104, 2003.
- 17) A. Border, R. Kumar, R. Maghoul, P. Raghavan, R. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins, and J. Wiener, "Graph structure in the Web," *Computer Networks*, vol.33, pp.309-320, 2000.
- 18) H. Jeong, S.P. Mason, and A.-L. Barabási, "Lethality and centrality in protein networks," *Nature*, vol.411, pp.41-42, 2001.
- 19) H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z.N. Oltvai, and A.-L. Barabási, "The large-scale organization of metabolic networks.," *Nature*, vol.407, pp.651-654, 2001.
- 20) R. de Castro and J.W. Grossman, "Famous trails to Paul Erdos," *Mathematical Intelligence*, vol.21, pp.51-63, 1999.
- 21) L.A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthélemy, and H.E. Stanley, "Classes of small-world networks," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol.97, no.21, pp.11149-11152, 2000.
- 22) J. Davidsen, H. Ebel, and S. Bornholdt, "Emergence of a Small World from Local Interactions: Modeling Acquaintance Networks," *Physical Review Letters*, vol.88, p.128701, 2002.
- 23) M.E.J. Newman and D.J. Watts, "Renormalization group analysis of the small-world network model," *Physics Letters A*, vol.263, pp.341-346, 1999.
- 24) M. Barthélemy and L.A.N. Amaral, "Small-World Networks: Evidence for a Crossover Picture," *Physical Review Letters*, vol.82, p.3180, 1999.
- 25) P. Erdős and A. Rényi, "On random graphs," *Publaciones Mathematicae*, vol.6, pp.290-297, 1959.
- 26) B. Bollobás, "Degree sequences of random graphs," *Discrete Mathematics*, vol.33, pp.1-19, 1981.
- 27) R. Albert and A.-L. Barabási, "Statistical mechanics of complex networks," *Reviews of Modern Physics*, vol.74, pp.47-97, 2002.
- 28) A.-L. Barabási and R. Albert, "Emergence of Scaling in Random Networks," *Science*, vol.286, pp.509-512, 1999.

- 29) H.E. Stanley, "Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena," Oxford University Press, New York, 1971.
- 30) K.J. Falconer, "Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications," Wiley, 1990.
- 31) A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, "Mean-field theory for scale-free random networks," *Physica A*, vol.272, pp.173-187, 1999.
- 32) S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, and A.N. Samukhin, "Structure of Growing Networks with Preferential Linking," *Physical Review Letters*, vol.85, p.4633, 2000.
- 33) 増田直紀, 今野紀雄, "複雑ネットワークの科学," 産業図書, 2005.
- 34) P.L. Krapivsky and S. Reder, "Organization of growing random networks," *Physical Review E*, vol.63, p.66123, 2001.
- 35) G. Bianconi and A.-L. Barabási, "Bose-Einstein Condensation in Complex Networks," *Physical Review Letters*, vol.86, p.5632, 2001.
- 36) S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chabez, and D.-U. Hwang, "Complex networks: Structure and dynamics," *Physics Reports*, vol.424, pp.175-308, 2006.
- 37) M.E.J. Newman, "The structure and function of complex networks," *SIAM Review*, vol.45, pp.167-256, 2003.
- 38) S.N. Dorogovtsev and J.F.F. Mendes, "Evolution of Networks," Oxford University Press, Oxford, 2003.
- 39) 増田直紀, 今野紀雄, "複雑ネットワーク 基礎から応用まで," 近代科学社, 2010.

1 群 - 11 編 - 3 章

3-3 時空ダイナミクス**3-3-1 結合発振器**

(執筆中)

3-3-2 ソリトン

(執筆中)

3-3-3 セルオートマトン

(執筆者：鳥飼弘幸)[2009年3月受領]

Stephen Wolfram による文献 1) に従うと、セルラーオートマトン (Cellular Automaton, CA) とは複雑な自然系を説明するための数学モデルであり、簡素で同一の構造をもつ多数のサイト (セルとも呼ばれる) の格子状の近傍結合系である。各サイトの状態は同一のルールに従って離散時間に対して同期的に更新される。また各サイトの値は 1 時刻前の同サイトとその近傍サイトの状態によって決まる。CA の一般論については Wolfram による文献 2) に丁寧に述べられている。また非線形力学系の立場からの CA の分類法などについては Chua などによる一連の文献 3) に詳しく述べられている。超離散力学系の立場からの CA については広田と高橋による文献 4) に詳しく述べられている。CA の概論については名著^{1,2,3,4)}に譲ることにして、本ハンドブックでは CA の応用研究をいくつか紹介したい。

CA による音声符号化⁵⁾

和田、黒岩、奈良は、CA のルールテーブルを動的に切り替えることにより任意の音声信号が CA のルールテーブル集合へと符号化できることを示した。特に、少数のルールテーブルの切替えにより任意の音声信号が可逆圧縮できることを示した。

CA による画像処理とビジョンチップ⁶⁾

池辺と浅井は、画像処理手法の一つであるモルフォロジー演算における代表的な演算 (例えば、ずらし重ね (Dilation) と掻き取り (Erosion)) を実現する CA を用いた画像処理アルゴリズムを提案した。同アルゴリズムは高速な画像処理が可能であることを示し、また同アルゴリズムを集積回路に実装してビジョンチップを開発した。

CA の逆問題⁷⁾

齋藤などは、任意のパターンを発生させるための CA ルールテーブルの合成法として、バイナリニューラルネットワークとその学習法を提案した。特に、非可逆圧縮的に多少の誤差を許容して与えられたパターンを再現するためには簡素なバイナリニューラルネットワークによる CA の合成法が有効であることを示した。

CA に基づいた神経細胞モデル⁸⁾

鳥飼などは、離散時間と離散状態を有する神経細胞モデルを提案し、非線形微分方程式で記述されるスパイクニューロンモデルの様々な周期的・カオス的な現象を近似するための学習法を提案した。これにより、与えられた特性をチップ上で自動的に獲得できるパルス結合ニューラルネットワークの合成の基礎を固めつつある。

3-3-4 反応拡散系, 時空カオス

(執筆者: 浅井哲也) [2009 年 8 月 受領]

反応拡散系とは, 非平衡状態において反応現象と拡散現象が混在したシステムのことをいう。物質やエネルギーの流れを伴う非平衡 - 開放系では, 反応の非線形性が著しく強調されて, 平衡系からは予想もつかない動的 (ダイナミック) で多様性に富む世界が出現する。例えば, ペロージフ・ジャボチンスキー (BZ) 反応に見られるようなダイナミックな螺旋パターンの発生, 動物の縞状体模様 (チューリング構造) の発生, 化学パターンの自己複製現象などは, 反応拡散系における現象の典型例である⁹⁾。

化学物質の反応と拡散のモデル (反応拡散モデル) を, 以下のような連立偏微分方程式

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D_i \nabla^2 x_i(\mathbf{r}, t) + f_i(x_i(\mathbf{r}, t)), \quad (3 \cdot 11)$$

で表す (x_i は反応種の濃度, \mathbf{r} は空間, t は時間, ∇^2 は空間のラプラシアン, D_i は拡散係数, f_i は非線形反応項)。なお, この式は必ずしも化学反応に限られたモデルではない。

よく知られている反応モデルとして, 二変数のオレゴネータがあげられる⁹⁾。これは, 生物の代謝回路 (クエン酸 / TCA 回路) を模した BZ 反応のモデルの一つで, そのダイナミクスは

$$\tau \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1) - a x_2 \frac{x_1 - b}{b + x_1}, \quad (3 \cdot 12)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2, \quad (3 \cdot 13)$$

で表される。ここで, x_1 と x_2 はそれぞれ HBrO_2 と Br^- イオンの濃度に相当する量を表し, τ , a , b は反応パラメータである。ここで, HBrO_2 イオンの反応速度は, Br^- のそれよりも十分に速い ($\tau \ll 1$)。オレゴネータのイオン濃度が変化しない点の集合 ($dx_1/dt = 0$, $dx_2/dt = 0$) をヌルクラインと呼び, それは式 (3・12) と式 (3・13) より

$$x_2 = \frac{x_1(x_1 + b)(1 - x_1)}{a(x_1 - b)}, \quad (\equiv l_1) \quad (3 \cdot 14)$$

$$x_2 = x_1. \quad (\equiv l_2) \quad (3 \cdot 15)$$

である。これらのヌルクライン (l_1 と l_2) の交点が, オレゴネータの固定点となる。

図 3・5 に典型的なパラメータを用いた場合のオレゴネータの相平面上の軌道とヌルクラインを示す。パラメータの値 (固定点に位置) に応じて, 安定性が変化する。図 3・5(a) に示すように, $a = 1$ のとき, 固定点はヌルクライン l_1 の $dx_2/dx_1 > 0$ の位置にあり, このとき, その固定点のまわりにもリミットサイクルが現れる。また $a = 3$ では, 固定点がヌルクライン l_1 の $dx_2/dx_1 < 0$ の位置にある。この場合の固定点は, 図 3・5(b) に示すように漸近安定となる。

ここで, 生体組織とオレゴネータとの対応について考えてみよう。刺激を受けると興奮する性質のある細胞には, 刺激が与えられて興奮状態にある興奮期, 興奮が収まり刺激を与えても興奮しない不応期, 及び刺激を与えると興奮する休止期の三つの状態がある。オレゴネータは, このような興奮性細胞と同様の振る舞いを示す。つまり, 図 3・5(b) 中のラベルが示すような, 休止期 (A), 興奮期 (B → C), 不応期 (D → A) の三つの状態をもつ。これらの状態はそれぞれ, Br^- イオンの消費, HBrO_2 イオンの自己触媒的增加 (触媒の酸化), Br^- イオ

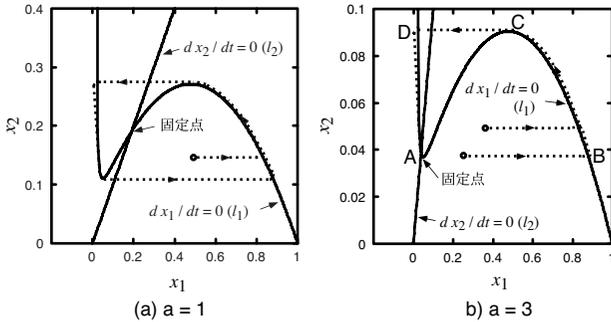


図 3-5 二変数オレゴネータの相平面上での振る舞い ($\tau = 10^{-2}$, $b = 0.02$): (a) 振動解; (b) 安定解

ンの消費（触媒の還元反応）を表す．オレゴネータが休止期にあるときは，外部からの刺激によって興奮できる状態にある ($A \rightarrow B$)．興奮性細胞と同様，興奮後に不応期にはいる ($C \rightarrow D$)．不応状態では，外部から入力があっても興奮しない．

オレゴネータの反応ダイナミクスを式 (3-11) に代入した二次元系が BZ 反応拡散系の典型的な例である．この系のシミュレーション例を図 3-6 に示す ($D_1 = 5 \times 10^{-4}$, $D_2 = 0$, $\tau = 10^{-2}$, $a = 3$, $b = 0.02$, 図の濃淡は x_2 の大きさ)．この図は自発的秩序形成の例であり，螺旋構造が回転しながら空間を広がっていく．一般によく知られたチューリングの反応拡散モデル，FitzHuge-南雲型の反応拡散モデル，Gray-Scott モデルなども式 (3-11) のかたちで表される⁹⁾．それぞれが異なった反応項をもっており，現れる秩序構造もそれぞれ特徴的である．

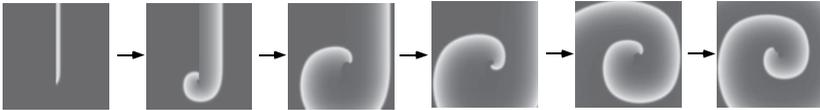


図 3-6 興奮性オレゴネータを反応項にもつ反応拡散系の振る舞いの例

カオスダイナミクスを反応項にもつような系も考えられる¹⁰⁾．式 (3-11) のかたちの系では，反応要素間の空間相互作用は“拡散”である．拡散に限らず，カオス的な振る舞いを示す要素を相互作用させたような舞台をつくれば，そこでは時間的にも空間的にもカオス的な振る舞い（時空カオス）が見られるだろう．時空カオスという言葉の定義はまだ議論の最中ではあるが，一般的な事実として，時空カオスを示すような系では，その系が平衡状態からずっと遠いところにあるとき，微小な空間摂動が系全体のダイナミクスに大きな影響を与える，ということである．

3-3-5 ILM

（執筆者：吉村和之）[2009 年 3 月 受領]

空間的離散性と非線形性を備えた力学系において，空間的に局在した振動モードが存在する¹¹⁾．この局在振動モードを，Intrinsic Localized Mode (ILM)，または，Discrete Breather

と呼ぶ。ILM のダイナミクスを記述する数理モデルとして、質点と相互作用（ばね）で構成される格子模型が広く用いられている。相互作用が線形の格子系の場合、格子中に軽い質点（不純物）が 1 個存在すると、その周りに局在振動が現れることはよく知られている。非線形格子系においては、すべての質点が同一質量をもち不純物がない場合にも、格子の任意の位置に局在振動モードが存在し得る。ILM という名称は、不純物に起因しない系固有の局在振動モードである点に由来する。ILM は、保存系と散逸系のいずれにおいても存在し得る。保存系の場合、系の可積分性は必要ない。また、空間一次元系に限らず、二次元系や三次元系にも存在し得る。これらの性質により、ILM は、自然界において普遍的な励起構造であると考えられる。実験的には、ジョセフソン結合素子系、非線形光学結晶、マイクロカントレバーアレイなどで観測されている。ILM 研究の現在までの発展に関しては、文献 12, 13, 14) を参照されたい。

代表的な格子模型の一つである一次元 Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 格子模型を例にとり、ILM の出現メカニズム、及び、諸性質について説明を行う。FPU 格子の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} + \beta(q_{n+1} - q_n)^3 - \beta(q_n - q_{n-1})^3$$

ここで、 q_n は n 番目の質点変位、 β は非線形相互作用の強さを表す定数である。対応する線形格子系 ($\beta = 0$) には、 $q_n(t) = \exp[i(kn - \omega t)]$ で与えられる空間的に広がった波形をもつ線形固有モードが存在する。式中の k と ω は、それぞれ、線形固有モードの波数と振動数である。波数 k と振動数 ω の分散関係を図示すると、図 3・7(a) に示すような曲線となる。系の離散性により、線形固有モードが取り得る振動数に上限が存在し、最大振動数 ω_{\max} より上に禁止帯が現れる。連続系の場合には、上限は存在せず、任意の振動数をもつ線形固有モードが存在する。最大振動数 ω_{\max} の存在は、離散系の著しい特徴である。線形格子系においては、 ω_{\max} を超える振動数の格子振動は出現しない。一方、正の非線形相互作用 ($\beta > 0$) があある場合、振幅が増大すると格子振動の振動数が増加するため、 ω_{\max} を超える振動が可能となる。この非線形効果により、ある質点の振動数が ω_{\max} を超えた場合、その振動は線形固有モードと共鳴して系全体に広がることはできなくなる。その結果、限られた範囲の格子点でのみ大きな振幅をもつ局在振動となる。このように離散性と非線形性の効果により、ILM が存在する（図 3・7(a)）。なお、非線形 Klein-Gordon 格子など FPU 格子以外の格子模型では、複数の禁止帯が存在する場合がある。このような系においては、各々の禁止帯について、そこに含まれる振動数をもつ ILM が出現し得る。ILM は、数学的には、運動方程式の空間的に局在した周期解として定義される。種々の格子模型に対し、ILM 解の厳密な存在証明が与えられている^{15, 16)}。

一次元 FPU 格子における ILM には、対称性の異なる 2 種類のモードが存在する。対称性の中心が格子点に位置するモードを、Sievers-Takeno mode、または、odd mode と呼ぶ（図 3・7(b)）。対称性の中心が格子点間に位置するモードを、Page mode、または、even mode と呼ぶ（図 3・7(c)）。図では、質点変位を縦方向に描いてある。隣接する質点は、互いに反位相で振動する。ILM の波形は、振動数に依存して変化する。振動数の増加に従って、局在性が強くなり振幅が大きくなる。図に示す波形は、振動数が大きく局在性が強い状態である。ま

た, 安定性に関しては, Sievers-Takeno mode は線形不安定, Page mode は線形安定であることが知られている。

格子上一を一定速度で伝播する移動型 ILM も, 数値計算において観測されている。移動型 ILM の性質は, いまだ十分に解明されていないが, 局在性が破れ空間的に広がったテイルを伴うことや, ILM の振動数と速度に依存してテイル振幅と安定性が変化することなどが知られている¹⁷⁾。2 個の移動型 ILM どうしの衝突過程では, ソリトンの場合とは異なり, 衝突の前後で各 ILM の波形と速度は保たれない¹⁸⁾。ILM 間でエネルギー交換が行われ, 速度変化も生ずる。移動型 ILM の衝突過程は非常に複雑であり, いまだ十分に理解されていない。今後の更なる解明が待たれる。

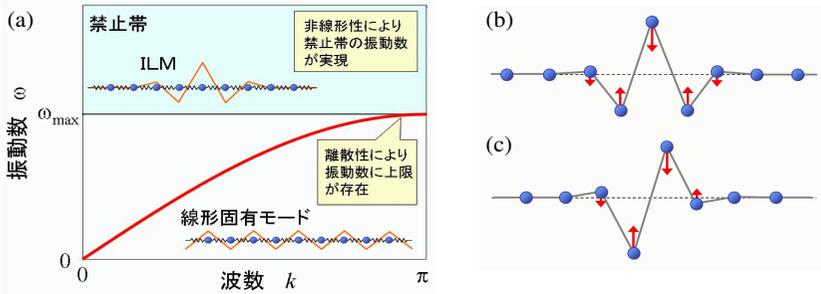


図 3-7 ILM の存在メカニズムと波形

参考文献

- 1) S. Wolfram, "Universality and complexity in cellular automata," *Physica* vol.10D, pp.1-35, 1984.
- 2) S. Wolfram, "A new kind of science," Wolfram media inc. 2002. <http://www.wolframscience.com/>
- 3) L.O. Chua et. al., "A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part I," *International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC)*, vol.12, no.12, pp.2655-2766, 2002. ; Part II, *IJBC*, vol.13, no.9, pp.2377-2491, 2003. ; Part III, *IJBC*, vol.14, no.11, pp.3689-3820, 2004. ; Part IV, *IJBC*, vol.15, no.4, pp.1045-1183, 2005.
- 4) 広田良吾, 高橋大輔, "差分と超離散," 共立出版, 2003.
- 5) M. Wada, J. Kuroiwa and S. Nara, "Completely reproducible description of digital sound data with cellular automata," *Phys. Lett. A*, vol.306, pp.110-115, 2002.
- 6) M. Ikebe and T. Asai, "A digital vision chip for early feature extraction with rotated template-matching CA," *Journal of Robotics and Mechatronics*, vol.17, no.4, pp.372-377, 2005.
- 7) T. Abe and T. Saito, "An approach to prediction of spatio-temporal patterns based on binary neural networks and cellular automata," *Proc. IEEE-INNS/International Joint Conference on Neural Networks*, pp.2495-2500, 2008.
- 8) H. Torikai, A. Funew and T. Saito, "Digital spiking neuron and its learning for approximation of various spike-trains," *Neural Networks*, vol.21, no.2-3, pp.140-149, 2008.
- 9) 三池英敏, 森 義仁, 山口智彦, "非平衡系の化学 III: 反応・拡散系のダイナミクス," 講談社, 1997.
- 10) A. Adamatzky, B. De Lacy Costello, and T. Asai, "Reaction-diffusion computers," Elsevier, UK, 2005.
- 11) A.J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," *Phys. Rev. Lett.*, vol.61, no.8, pp.970-973, 1988.

- 12) S. Aubry, "Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization," *Physica D*, vol.103, no.1-4, pp.201-250, 1997.
- 13) S. Aubry, "Discrete Breathers: Localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems," *Physica D*, vol.216, no.1, pp.1-30, 2006.
- 14) S. Flach and A.V. Gorbach, "Discrete breathers - Advances in theory and applications," *Physics Reports*, vol.467, no.1-3, pp.1-116, 2008.
- 15) R.S. MacKay and S. Aubry, "Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators," *Nonlinearity*, vol.7, no.6, pp.1623-1643, 1994.
- 16) S. Flach, "Existence of localized excitations in nonlinear Hamiltonian lattices," *Phys. Rev. E*, vol.51, no.2, pp.1503-1507, 1995.
- 17) K. Yoshimura and Y. Doi, "Moving discrete breathers in nonlinear lattice: Resonance and stability," *Wave Motion*, vol.45, no.1-2, pp.83-99, 2007.
- 18) Y. Doi, "Energy exchange in collisions of intrinsic localized modes," *Phys. Rev. E*, vol.68, no.6, 066608, 2003.

1 群 - 11 編 - 3 章

3-4 フラクタルとその応用

(執筆者: 徳永隆治) [2009 年 4 月 受領]

3-4-1 自己相似性, フラクタル次元

単位閉区間 $[0, 1]$ を三分割し, 中央の閉区間を取り除く再帰的操作によってつくられる極限集合を 3 進 Cantor 集合という (図 3・8 参照). このコンパクト集合は, 実数と同数の元をもつ完全集合であり, 内点をもたない完全非連結集合である. また, 集合の局所構造が大域構造と一致する自己相似性をもっている.



図 3・8 3 進 Cantor 集合 (上から初期区間, 1 から 5 回反復)

通常, 整数 (位相) 次元をもつコンパクト集合は, 長さ・面積・体積などにより “量” が測られるが, 自己相似集合は, “量” の一般化された概念である測度に基づき, 非整数 (フラクタル) 次元によって特徴づけされる.

ある有界集合 Λ が, 可算個の有界集合 $A = \{A_i\}$ の合併で包含される場合, その細かさを $\varepsilon = \sup_i \text{diam}(A_i)$ で表し, A を Λ の ε 被覆という. なお, $\text{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} \|x - y\|$ は, 長さで測った集合の大きさである. ここで, 被覆の “量” を $M = \sum_i \text{diam}(A_i)^p (p \geq 0)$ で評価する. 例えば, $p = 1$ なら長さ, $p = 2$ なら面積, $p = 3$ なら体積による測定と考えればよい. M は, 有界集合の交わりによって変化するため, 最も交わりの少ない ε 被覆を選択し, $M_\varepsilon^p(\Lambda) = \inf_A \{\sum_i \text{diam}(A_i)^p : A_i \in A\}$ とする. 最終的に, 細かさの極限における

$$M^p(\Lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon^p(\Lambda) = \sup_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon^p(\Lambda)$$

を, p 次元 Hausdorff 外測度といい, これを非零かつ有限とする p の値を Λ の Hausdorff 次元という. 例えば, 単位閉区間 $[0, 1]$ を 2^n 個の長さ 2^{-n} の閉区間で被覆するとき, $M^p(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2/2^p)^n$ となり, 収束と発散の境界値 $p = 1$ が Hausdorff 次元となる. 同様に 3 進 Cantor 集合を, 2^n 個の長さ 3^{-n} の閉区間で被覆するとき, $M^p(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3^p)^n$ となり, Hausdorff 次元は $\log 2 / \log 3$ となる.

距離空間 V 上の自己相似集合 Λ が縮小定数 $\{s_i\}$ をもつ可算個の縮小写像 $\{W_i : V \rightarrow V\}$ に関して, $\Lambda = \cup W_i \Lambda$ 及び $W_i \Lambda \cap W_j \Lambda (i \neq j)$ を満足する場合, 超越方程式 $1 = \sum s_i^p$ の解は相似次元と呼ばれ, Hausdorff 次元に一致することが知られている. また, $\varepsilon = \text{diam}(A_i)$ 及び $\{A_i\}$ の数を N_ε と仮定し, Hausdorff 外測度を $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon \varepsilon^p$ で近似する場合, これが非零かつ有限であるなら, $N_\varepsilon \propto \varepsilon^{-p}$ となる. この性質に注目し, 被覆の細かさ ε とその総数 N_ε の対数スケーリング $p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\log N_\varepsilon / \log \varepsilon$ による非整数次元は容量次元と呼ばれる. このほか, 実用的な非整数次元として, 情報次元, 相関次元などがあげられるが, Hentschel と Procaccia によって, これらは一般化次元の特例であることが示されている.

3-4-2 フラクタル画像処理

3 進 Cantor 集合を例とする距離空間 V 上の大域自己相似集合 Λ は、複数の縮小写像 $\{W_i : V \rightarrow V\}$ による自己被覆性 (self-covering property) $\Lambda = \cup W_i \Lambda$ を満足する。Hutchinson 及び畑正義は、 V 上のコンパクト集合を元とする抽象空間が、Hausdorff 距離の下で完備な距離空間 U となり、不動点定理より Λ が縮小写像 $FX = \cup W_i X$ の漸近安定なコンパクト不変集合となることを示している。

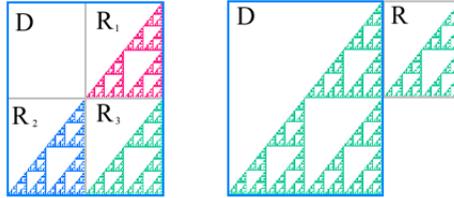


図 3-9 自己相似集合と部分自己相似集合 (D は変域であり, R は値域を示す)

Barnsley¹⁾らは、任意のコンパクト集合 $X \in U$ を不変集合とする写像 F の構成方法を逆問題としてとらえ、カラーズ定理をはじめとする一連の反復関数系 (IFS) 理論によって、画像合成あるいは画像符号化 (圧縮) への応用を開拓した。特に, Jaquin は、区分的変域上の一部を切り出し、全体に加える操作 (図 3-9 参照) を許容して定義される部分自己相似性に注目し、任意の画像曲面を不変集合によって近似する局所反復関数 (LIFS) 符号化²⁾を提案した。



図 3-10 局所反復関数系による画像復号 (左から初期画像, 1, 2, 3 反復結果)

LIFS 符号化とは、対象画像を交わりのない小 (値域) ブロックに分割し、各々の値域ブロック上の画素値を近似する大 (変域) ブロックと対応する三次元局所変換を探索によって求める処理であり、変域ブロックと局所変換を記述するすべてのパラメータが圧縮データとなる。LIFS 復号とは、任意の初期画像に対して、すべての局所変換を反復する処理であり、処理結果は徐々に復号画像へ収束する。なお、局所変換は、変域ブロック上の画素値に対する (1) ダウンサンプル, (2) 交流成分のスケーリング, (3) 直流成分のバイアスという三つの操作からなる (図 3-10 参照)。画像曲面という微分不可能な幾何構造を部分自己相似性によって記述し、その無限階層性から任意解像度で復号できることが、従来の画像符号化と異なる特徴である。しかし、一般の画像曲面では、平坦、傾斜領域及び直線状の不連続領域 (エッジ) において部分自己相似性が適用できるのみで、複雑なエッジやテクスチャに対して局所

変換の近似能力が極めて低いことが指摘されており、復号画像において任意の画品質を実現するには、値域ブロックの細分割³⁾、ベクトル量子化・変換符号化などの異なる枠組みとの併用⁴⁾が不可欠となる。

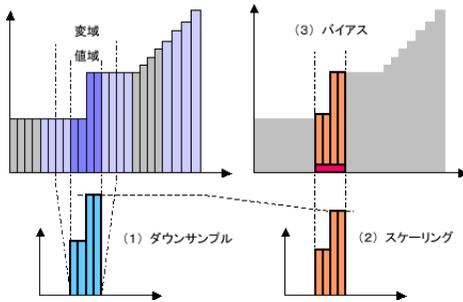


図 3-11 LIFS 符号化における局所変換

LIFS 符号化の上記の特性に注目し、井田孝らは、連結したエッジ（輪郭）を被覆する値域ブロックをもつ局所変換による輪郭抽出法⁵⁾を提案している。まず、大雑把に輪郭をなぞる近似曲線を 2 値画像として設定し、対象画像を用いて変域ブロックが近似曲線を被覆する局所変換を逐次的に求める。次に、近似曲線に局所変換の一部である画像平面上の二次元縮小変換を施す。この処理を反復することで、近似曲線は徐々に輪郭へ収束して行く（図 3-12 参照）。従来の微分可能曲線の最適化に基づく輪郭抽出法では、輪郭形状が微分不可能な箇所では不適切な局所解に陥る傾向があるが、自己相似曲線を用いる上記手法は、多様な輪郭に対応できることを指摘している。

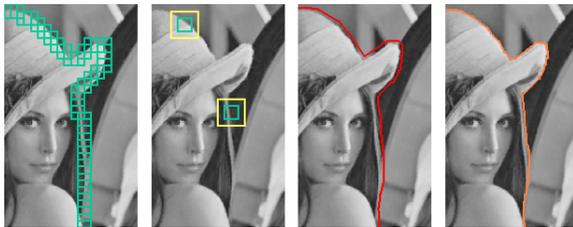


図 3-12 輪郭抽出（左から右へ：輪郭を被覆する値域ブロック，変域ブロックの例，近似輪郭，反復結果）

参考文献

- 1) M. Barnsley, "Fractals Everywhere," Springer Verlag, 1988.
- 2) M. Barnsley and L.Hurd, "Fractal Image Compression," AK Peters, 1992.
- 3) Y. Fisher, "Fractal Image Compression," Springer Verlag, 1995.
- 4) 徳永隆治, "フラクタルと画像処理," コロナ社, 2002.
- 5) T. Ida and Y. Sambonsugi, "Image segmentation and countour detection using fractal coding," IEEE trans. Circuits and System. Video Technol., vol.8, no.8, pp.968-975, 1998.