■5 群（通信・放送）- 1 編（待ち行列理論とシミュレーション）

2 章 マルコフ形モデル

（執筆者：河西憲一）［2010 年 5 月 受領］

■概要■

計算機システムや通信ネットワークなどを利用することは，CPU や通信帯域などの資源により提供されるサービスを利用者が受けることと考えられる．このようなサービスを供給するシステムを抽象化し数学的な対象として捉えると，資源を要求する客とそれを提供する扱い者（サーバ）から形成される待ち行列システムとしてみなされる．一般に待ち行列システムの状態は時間的に変化していき，過去の待ち行列システムが辿った履歴に依存して現在の状態があり，また未来の推移が決定される．マルコフ形モデルと本章で想定する数学的なモデルの一群は，待ち行列システムを過去の履歴に関係なく現在の状態のみで一意に定めることができる数理モデルのことを指す．待ち行列システムの状態を記述する変数が現在のみに限られる数理モデルを構築するとその数学的扱いが易くなり，待ち行列システムの性能評価指標を定量化する上で有効な解析手段が得られる．本章ではこのようなマルコフ形モデルとしてモデル化される待ち行列システムについて説明する．

なお，本章では待ち行列システムの記述方法としてケンドール記号を用いる．ケンドール記号は $A/B/c/K$ のように記述され，A は到着過程を，B はサービス時間の確率分布を，c はサーバの数を，K は待ち行列システムの容量を表す．例えば，$M/G/1/K$ とは到着過程がポアソン過程（M）と呼ばれるモデルに従い，サービス時間の確率分布が一般分布（G）であり，サーバ数は一つであり，サービス中の客も含めて全体で K 人まで客を受け入れることができる待ち行列システムを表す．また，システム容量 K が無限大のときは省略することが多いので本章でもそれに従う．

【本章の構成】

本章の構成は次のとおりである．まず最初に 4-1 節では出生死滅過程を用いた $M/M/c/c$ システムと $M/M/c$ システム，つづいて 4-2 節では隠れマルコフ連鎖法を使った $M/G/1$ システムと $GI/M/1$ システム，そして 4-3 節では補助変数法による $M/G/1$ システムと $M/G/c/c$ システムについて，その定式化と解析手法を述べる．最後に 4-4 節ではマルコフ形モデルで記述できる待ち行列システムと関連の深い行列幾何法について，その概要を述べる．

■5 群 - 1 編 - 2 章

2-1 出生死滅過程モデル

（執筆者：河西憲一）[2008 年 10 月 受領]

本節では出生死滅過程と呼ばれるマルコフ形モデルについて，待ち行列システムを例に説明する．特に損失系モデルと待ち合わせ系モデルの代表例を取り上げる．

2-1-1 損失系モデル[1)]

損失系モデルの代表として $M/M/c/c$ システムを説明する．$M/M/c/c$ システムは c 個のサービス窓口から構成され，客は到着率 λ のポアソン過程に従って到着し，一つのサービス窓口からサービス率 μ の指数分布に従う時間のサービスを受ける．客の到着とサービス時間は互いに独立である．サービス窓口間のサービス時間も互いに独立である．客が到着した時点で c 個のサービス窓口すべてがふさがっているときは，客はシステムに入ることはできず，すぐに退去する．よって，システム内に滞在できる最大の客数は c に等しい．

時刻 t でシステム内に滞在する客数を $X(t)$ とする．時刻 t から微小な時間 Δt だけ時間が経過したときの系内客数 $X(t+\Delta t)$ を考える．仮に $X(t+\Delta t)=n$ であるとする．ただし，当座 n の範囲を $0<n<c$ に限定する．次の三つの事象を考える．

1. $X(t)=n$ で，Δt の間に客が到着せず，客のサービスも終了しない．
2. $X(t)=n-1$ で，Δt の間に客が 1 人到着し，客のサービスは終了しない．
3. $X(t)=n+1$ で，Δt の間に客が到着せず，客の 1 人がサービスを終了する，

これらの事象が生起すれば，$X(t+\Delta t)=n$ の状態に推移することは明らかである．$p_{i,n}(t)$ を $p_{i,n}(t)=\Pr\{X(t)=n\,|\,X(0)=i\}$ なる確率とする．客の到着が到着率 λ のポアソン過程に従うことと，サービス時間がサービス率 μ の指数分布に従うこと，さらに到着過程とサービス時間が互いに独立であることから，$p_{i,n}(t+\Delta t)$ について次式が成立する．

$$\begin{aligned}p_{i,n}(t+\Delta t) &= p_{i,n}(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)^n + p_{i,n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)^{n-1}\\ &\quad + p_{i,n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)(n+1)\mu\Delta t(1-\mu\Delta t)^n + o(\Delta t)\end{aligned} \tag{2・1}$$

ただし，$o(\Delta t)$ とは $\Delta t \to 0$ のときの高位の無限小を表し

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0 \tag{2・2}$$

である．例えば，式 (2・1) の右辺第 1 項は一つの事象が生起する確率を表す．$o(\Delta t)$ はここで挙げた三つの事象以外（例えば，2 人の客が同時に到着することにより $X(t+\Delta t)=n$ の状態に推移するなど）が生ずる確率である．式 (2・1) の両辺を Δt で割り，$\Delta t\to 0$ の極限を計算すると

$$p'_{i,n}(t) = -(\lambda+n\mu)p_{i,n}(t) + \lambda p_{i,n-1}(t) + (n+1)\mu p_{i,n+1}(t) \tag{2・3}$$

が得られる．ただし，$p'_{i,n}(t)$ は $p_{i,n}(t)$ の t に関する導関数である．式 (2・3) を眺めると，状

態 n の時間的な変化が，状態 n，$n-1$，$n+1$ からのみの推移により決定され，$|m-n| \geq 2$ なる状態 m には依存しないことが分かる．このようなマルコフ過程を出生死滅過程と呼ぶ．$M/M/c/c$ システムは出生死滅過程の例となる．

式 (2･3) の解 $p_{i,n}(t)$ は時刻 t における $M/M/c/c$ システムを記述するが，実際上は十分時間が経過し，システムが安定した定常状態を考えることが多い．定常状態での系内客数の確率分布を定常分布と呼ぶ．定常分布の存在を仮定すれば，初期状態と無関係に $\lim_{t\to\infty} p_{i,n}(t) = p_n$ なる極限分布が存在し，定常分布と一致することが知られている．また，$\lim_{t\to\infty} p'_{i,n}(t) = 0$ であることも示される．よって，定常状態では $0 < n < c$ の p_n について次式が得られる．

$$0 = -(\lambda + n\mu)p_n + \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} \tag{2･4}$$

同様に $n = 0, c$ に対して次式が得られる．

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \tag{2･5}$$

$$0 = -c\mu p_c + \lambda p_{c-1} \tag{2･6}$$

式 (2･4)，式 (2･5)，式 (2･6) は大域平衡方程式，あるいは単に平衡方程式と呼ばれる．右辺の各項は確率のフロー（確率流）を表す．例えば式 (2･4) において，第 1 項は系内客数が n の状態から出る確率流であり，第 2 項と第 3 項は系内客数 $n-1$ と $n+1$ の状態から n の状態に入る確率流を表す．平衡方程式とはこれら確率流が各状態において釣り合うことを意味する．

平衡方程式を解くことにより定常分布 p_n を次のように求めることができる．

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\mu} = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \tag{2･7}$$

よって，p_0 が決まれば p_n が求められる．p_0 が未知数として残ったが，確率 p_n をすべて加えた結果が 1 に等しくなる条件（正規化条件）$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ から決定することができる．すなわち，p_0 は次式で与えられる．

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{c} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\mu}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{c} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right)^{-1} \tag{2･8}$$

以上により，$M/M/c/c$ システムの定常分布が求められた．

$M/M/c/c$ システムにおいて p_c はすべてのサービス窓口がふさがっている確率であり，アーラン B 式と呼ばれ，次式で与えられる．

$$B(c,a) = p_c = \frac{a^c/c!}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c} a^n/n!}, \quad c \geq 1 \tag{2･9}$$

ここで，$a = \lambda/\mu$ は呼量と呼ばれる．$B(c,a)$ は任意時点でサービス窓口がすべてふさがっている確率であるが，客がポアソン過程に従って到着するため PASTA が適用可能となり，客の到着時点で観測したときにすべてふさがっている確率にも等しい．よって，アーラン B 式

は客が到着時点でシステムに入ることができず損失となる確率（損失率）という意味をもつ．

2-1-2 待ち合わせ系モデル[2)]

次に待ち合わせ系モデル $M/M/c$ システムを説明する．本章 2-1-1 と同様に，客は到着率 λ のポアソン過程に従って到着し，サービス窓口は c 個用意されているとする．それぞれのサービス窓口において客はほかとは独立にサービス率 μ の指数分布に従う時間のサービスを受ける．到着した客は空いているサービス窓口を見つけたら直ちにサービスを受けるが，すべての窓口がふさがっている場合は待ち行列に並ぶ．客の待ち合わせ室の容量に制限はないとする．客は先着順にサービスを受ける．サービスが終了したら客は直ちにシステムから退去する．定常状態における $M/M/c$ システムの系内客数が n である定常分布を本章 2-1-1 と同様に p_n で表す．$M/M/c$ システムも出生死滅過程としてとらえることができ，平衡方程式は次のように与えられる．

$$0 = -\lambda p_0 + \mu_1 p_1 \tag{2・10}$$

$$0 = -(\lambda + \mu_n)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}, \quad n \geq 1 \tag{2・11}$$

ただし，$\mu_n = \min(n, c)\mu$, $n \geq 1$ である．本章 2-1-1 と同じように平衡方程式から定常分布 p_n を次のように求めることができる．

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\mu_i} = \begin{cases} p_0 \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, & 1 \leq n < c \\ p_0 \dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c}, & n \geq c \end{cases} \tag{2・12}$$

ここで，p_0 は正規化条件 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ から決定され

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\mu_i}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \frac{c}{c - \lambda/\mu}\right)^{-1} \tag{2・13}$$

である．ただし，$\lambda/\mu < c$ を仮定した．$M/M/c$ システムの場合は n のとりうる範囲は有限ではなく $n \geq 0$ なる非負の整数であるので，p_0 が収束するためには $\lambda/\mu < c$ の条件が必要である．また，$\lambda/\mu < c$ であれば $M/M/c$ システムは安定となり，定常分布 p_n が存在することも知られている．

$M/M/c$ システムにおいて到着客が待ち行列に並ぶ確率，すなわち待つ確率（待ち率）を与える式を特にアーラン C 式と呼ぶ．呼量 $a = \lambda/\mu$ と，サービス窓口の数 c に対してアーラン C 式 $C(c, a)$ は次式で与えられる．

$$C(c, a) = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \frac{a^c}{c!(1 - a/c)} p_0 \tag{2・14}$$

また，待ち合わせに入った条件で待ち客数が n である確率 q_n は次式で与えられる．

$$q_n = p_{c+n}/C(c, a) = (1 - \rho)\rho^n, \quad n \geq 0 \tag{2・15}$$

ただし，$\rho = a/c$ である．すなわち，q_n は幾何分布で与えられる．この結果は，$M/M/c$ システムが出生死滅過程であることと，系内客数が c 以上で同じ推移構造をもつことに起因する．

■参考文献

1) 高橋敬隆, 山本尚生, 吉野秀明, 戸田彰, わかりやすい待ち行列システム－理論と実践－, 電子情報通信学会, 2003.
2) D. Gross and C.M. Harris, Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley & Sons, 1998.

■5 群 - 1 編 - 2 章

2-2 隠れマルコフモデル

（執筆者：河西憲一）［2008 年 10 月 受領］

本節では $M/G/1$ システムと $GI/M/1$ システムを例に隠れマルコフ連鎖法と呼ばれる手法を説明する．

2-2-1 $M/G/1$ システム[1)]

一つのサービス窓口をもつ待ち行列システムを考える．客は到着率 λ のポアソン過程に従って到着し，先着順にサービスを受ける．客のサービス時間は到着過程とは独立であり，さらに互いに独立で同一の分布関数 $B(x)$ をもつ確率変数とし，その平均値を b とする．安定な $M/G/1$ システムに焦点を絞るため，$\rho = \lambda b < 1$ を仮定する．

時刻 t における系内客数を $X(t)$ とする．時刻 $t = 0$ でシステムは空であるとし，$\tau_1, \tau_2, \ldots$ を最初の客のサービス終了時刻，2 番目の客のサービス終了時刻，などとする．便宜上 $\tau_0 = 0$ とする．n 番目の客のサービス終了直後にシステムに残っている客数を $X_n = N(\tau_n+)$ とする．X_n は次の漸化式を満たす．

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1}, & X_n \geq 1 \\ A_{n+1}, & X_n = 0 \end{cases} \tag{2・16}$$

ここで，A_{n+1} は区間 (τ_n, τ_{n+1}) 内に到着する客数である．

さて，$M/G/1$ システムでは客の到着はポアソン過程に従うゆえ，客の到着間隔は互いに無関係で（独立性）で，かつ，どの時刻でも到着の様子は同じ（定常性）である．さらに，サービス時間の分布が客ごとに互いに独立で同じ分布に従い，到着過程とも独立であるので，確率変数 $\tau_{n+1} - \tau_n$ は時刻 τ_n 以前のシステムの挙動とは無関係である．また，$\tau_{n+1} - \tau_n$ の分布は $X_n \geq 1$ ならばサービス時間分布に一致し，$X_n = 0$ ならば到着率 λ の指数分布とサービス時間分布の畳み込みに等しい．よって，X_n が与えられるならば $\tau_{n+1} - \tau_n$ は（X_n には依存するかもしれないが）n には依存しない．これらの性質と客がポアソン過程に従うことから A_{n+1} は時刻 τ_n 以前のシステムの挙動とは無関係であり，とりわけ $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ とも無関係である．また A_n は X_n が固定されれば n にも依存しない．以上の結果から $\{X_n, n \geq 0\}$ は状態空間 $\mathcal{I} = \{0, 1, \ldots\}$ 上の斉時な離散時間マルコフ連鎖を構成する．確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ それ自身はマルコフ過程とはならないが，時間軸上の点列 $\{\tau_i, i \geq 0\}$ ではマルコフ連鎖を形成することから，$\{X_n, n \geq 0\}$ を $\{X(t), t \geq 0\}$ に対する隠れマルコフ連鎖とか埋め込まれたマルコフ連鎖と呼ぶ．

$\{X_n, n \geq 0\}$ の推移確率 $P_{i,j} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ を求める．$\beta_k = \Pr\{A = k\}, k \geq 0$ とする．ただし，A はサービス時間中に到着する客数を表す確率変数である．A_n と A は同じ分布をもつことに注意すれば，マルコフ連鎖 $\{X_n, n \geq 0\}$ の推移確率行列 $P = (P_{i,j})$ が次のように与えられる．

$$P = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2・17}$$

ただし，β_k はサービス時間中に k 人の客が到着する確率に等しく

$$\beta_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dB(x), \quad k \geq 0 \tag{2・18}$$

である．$\{X_n, n \geq 0\}$ の定常分布 p_i^* は次の方程式を満たす．

$$p_i^* = p_0^* \beta_i + \sum_{k=1}^{i+1} p_k^* \beta_{i-k+1}, \quad i \geq 0 \tag{2・19}$$

式 (2・19) より p_i^* の確率母関数 $P^*(z) = \sum_{i=0}^\infty p_i^* z^i$ が次式で与えられる．

$$P^*(z) = p_0^* \frac{(1-z)B^*(\lambda - \lambda z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \tag{2・20}$$

ここで，$B^*(s)$ は $B(x)$ のラプラス－スティルチェス（Laplace–Stieltjes）変換である．p_0^* は正規化条件 $\sum_{i=0}^\infty p_i^* = 1$ から $p_0^* = 1 - \rho$ となる．以上により，ポラチェック－ヒンチン（Pollaczek–Khinchin）の公式と呼ばれる次式が得られる．

$$P^*(z) = (1-\rho) \frac{(1-z)B^*(\lambda - \lambda z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \tag{2・21}$$

定常分布 p_i^* はポラチェック－ヒンチンの公式から求められるが，実際上の関心事は任意時点における系内客数の分布 p_i である．$M/G/1$ システムの場合，客がサービス終了後に残す系内客数分布 p_i^* は，客の到着時点で見る系内客数分布 π_i に等しいことが示される．一方，客の到着過程がポアソン過程であるので PASTA が適用でき，到着時点で観測する系内客数分布 π_i は，任意時点で観測する系内客数分布 p_i に等しい．結局，$p_i^* = \pi_i = p_i$ を意味し，特に p_i の確率母関数は式 (2・21) に一致する．

2-2-2 $GI/M/1$ システム[2)]

サービス窓口が一つの先着順サービス規律に従う待ち行列システムで，客のサービス時間がサービス率 μ の指数分布で与えられる場合を考える．ただし，客の到着間隔は互いに独立で同一の分布関数 $A(x)$ に従う確率変数とする．また，到着間隔はサービス時間とも独立とする．$A(x)$ のラプラス－スティルチェス変換を $A^*(s)$ で表し，平均値を $1/\lambda$ とする．

$M/G/1$ システムの場合と同様に，時刻 t での系内客数 $X(t)$ はマルコフ過程とはならない．そこで，n 番目の客の到着時点 τ_n，$n \geq 1$ に着目し，τ_n 直前の系内客数 $Y_n = N(\tau_n-)$ を考える．ただし，$\tau_0 = 0$ と $Y_0 = N(\tau_0-) = 0$ を仮定する．Y_n は次の漸化式を満たすことが分かる．

$$Y_{n+1} = \max\{Y_n + 1 - B_{n+1}, 0\}, \quad n \geq 0 \tag{2・22}$$

ここで，B_{n+1} は区間 (τ_n, τ_{n+1}) 中にサービスを受けシステムから退去した客数である．ただ

し，システムが空になっても仮想的にサービスを受けて退去する客数を含むとする．τ_{n+1} と τ_n は n 番目と $n+1$ 番目の客の到着時点であることから，$\tau_{n+1}-\tau_n$ は客の到着間隔に等しい．客の到着間隔が独立同一分布であり，サービス時間とも独立であることと，サービス時間が指数分布に従うことから，B_{n+1} は τ_n 以前のシステムの挙動とは無関係であり n にも依存しない．よって，$\{Y_n, n \geq 0\}$ は $\{X(t), t \geq 0\}$ に対する隠れマルコフ連鎖を構成する．

確率変数 B を客の到着間隔中にサービスを終了してシステムから退去する客数とする．このとき，$\alpha_k = \Pr\{B = k\}$ は次式で与えられる．

$$\alpha_k = \int_0^\infty \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} dA(x) \tag{2・23}$$

B_n と B は同じ分布に従う．よって，$\{Y_n, n \geq 0\}$ の推移確率 $P_{i,j} = \Pr\{Y_{n+1} = j | Y_n = i\}$ は

$$P_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i+1-j}, & 1 \leq j \leq i+1, i \geq 0 \\ 0, & j > i+1 \end{cases} \tag{2・24}$$

であり，$j = 0$ については $P_{i,0} = 1 - \sum_{k=0}^{i} \alpha_k$ で与えられる．$\{Y_n, n \geq 0\}$ の定常分布 π_i は，$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}, j \geq 0$ と正規化条件 $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ で求められる．ここで π_n について幾何分布

$$\pi_n = (1-r)r^n, \quad n \geq 0 \tag{2・25}$$

を仮定する．さて，もし r が非線形方程式 $z - A^*(\mu - \mu z) = 0$ の $0 < z < 1$ なる解であるならば，式 (2・25) は定常分布を与えることがいえる．一方，$A^*(\mu - \mu z)$ は z について単調非減少凸関数であり，$0 < A^*(\mu) < 1$ かつ $A^*(0) = 1$ であることから

$$\left. \frac{dA^*(\mu - \mu z)}{dz} \right|_{z=1} = \mu/\lambda > 1 \tag{2・26}$$

すなわち，$\rho = \lambda/\mu < 1$ ならば $0 < z < 1$ で唯一の解が存在することも分かる．よって，$\rho < 1$ のとき $z - A^*(\mu - \mu z) = 0$ を満たす r に対して，式 (2・25) は $GI/M/1$ システムの客の到着時点での定常分布を与える．

定常分布 π_n は客の到着時点で観測する系内客数分布であり，任意時点で観測するときの定常分布 p_n とは一般には異なる．π_n と p_n の関係式については

$$\lambda \pi_{n-1} = \mu p_n, \quad n \geq 1 \tag{2・27}$$

が成立することが知られている．式 (2・27) はしばしば「rate-up = rate-down の関係」などと呼ばれるが，その意味は式 (2・27) が次のように解釈されることによる．単位時間当たりに到着する客数の期待値は到着率 λ に等しい．到着直前の系内客数が $n-1$ で条件づけると $\lambda\pi_{n-1}$ となる．これは，系内客数が $n-1$ から n に流れる確率流でもある．一方，系内客数が n である時間平均は p_n であり，この時間の間にサービス中の客はサービス率 μ でシステムから退去する．すなわち，系内客数が n から $n-1$ に流れる確率流が μp_i で与えられる．定常状態においては系内客数が $n-1$ から n への確率流と n から $n-1$ への確率流は等しく，平衡を保つので式 (2・27) が成り立つ．式 (2・27) から p_n は次式で与えられる．

$$p_n = \lambda \pi_{n-1}/\mu = \rho \pi_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{2・28}$$

正規化条件 $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ を使えば $p_0 = 1 - \rho$ であることも示されるので，結局 $GI/M/1$ システムの任意時点での定常分布は次式で与えられる．

$$p_n = \begin{cases} 1-\rho, & n=0 \\ \rho(1-r)r^{n-1}, & n \geq 1 \end{cases} \tag{2・29}$$

■参考文献

1) L. Kleinrock, Queueing Systems Volume I: Theory, John Wiley & Sons, 1975.

2) 藤木正也, 雁部穎一, 通信トラヒック理論, 丸善, 1980.

■5 群 - 1 編 - 2 章

2-3 補助変数法によるマルコフモデル

（執筆者：河西憲一）［2008 年 10 月 受領］

本節では補助変数法と呼ばれる解析手法を $M/G/1$ システムと $M/G/c/c$ システムを例に述べる．前者では経過サービス時間を，後者では残余サービス時間を補助変数として概説する．

2-3-1 経過サービス時間を補助変数とする $M/G/1$ システムの解析[1, 2)]

一つのサービス窓口をもつ待ち行列システムを考える．客は到着率 λ のポアソン過程に従って到着し，先着順にサービスを受ける．客のサービス時間は互いに独立で同一の分布関数 $B(x)$ をもつ確率変数であり，平均値を b とする．$B(x)$ は絶対連続であり，$B(0) = 0$ とすべての $x > 0$ について $B(x) < 1$ を仮定する．安定な $M/G/1$ システムに焦点を絞るため，$\rho = \lambda b < 1$ を仮定する．$X(t)$ を時刻 t におけるサービス中の客も含めた系内客数，$\xi(t)$ を $X(t) \geq 1$ のときにサービスを受けている客の時刻 t での経過サービス時間を表す確率変数とする．このとき，$X(t) \geq 1$ なら $\eta(t) = (X(t), \xi(t))$，$X(t) = 0$ の場合は $\eta(t) = 0$ で定義される確率過程 $\{\eta(t), t \geq 0\}$ は状態空間 $\mathcal{N} = \{0\} \cup \{(i, x), i = 1, 2, \ldots, x \geq 0\}$ 上のマルコフ過程となる．

$X(t)$ と $\xi(t)$ に関する同時確率密度関数 $p_i(x, t)$ を次のように定義する．

$$p_i(x,t)dx = \Pr\{X(t) = i, x < \xi(t) \leq x + dx\}, \quad i \geq 1 \qquad (2\cdot30)$$

さらに $p_0(t)$ を次式で定義する．

$$p_0(t) = \Pr\{X(t) = 0\} \qquad (2\cdot31)$$

$p_i(x,t)$ に関する方程式を導くため，時刻 t と時刻 $t+\Delta t$ での $\eta(t)$ の変化を考える．時刻 $t+\Delta t$ で状態 $(i, x+\Delta t)$ であるためには以下の条件が成立する必要がある．

1. 時刻 t で状態 (i, x) であり，Δt の間に客が到着せず，サービス中の客のサービスが終了しない．
2. 時刻 t で状態 $(i-1, x)$ であり，Δt の間に客が 1 人到着し，サービス中の客のサービスが終了しない．ただし，$i = 1$ の場合を除く．

以上の条件をもとに $p_i(x,t)$ について次式を得る．

$$\begin{aligned} p_i(x+\Delta t, t+\Delta t) &= p_i(x,t)(1-\lambda\Delta t)\left(1 - \frac{b(x)}{1-B(x)}\Delta t\right) + p_{i-1}(x,t)\lambda\Delta t\left(1 - \frac{b(x)}{1-B(x)}\Delta t\right) \\ &\quad + o(\Delta t), \quad i \geq 2 \end{aligned} \qquad (2\cdot32)$$

$$p_1(x+\Delta t, t+\Delta t) = p_1(x,t)(1-\lambda\Delta t)\left(1 - \frac{b(x)}{1-B(x)}\Delta t\right) + o(\Delta t) \qquad (2\cdot33)$$

定常状態を考え，$p_i(x) = \lim_{t\to\infty} p_i(x,t), p_0 = \lim_{t\to\infty} p_0(t)$ とする．さらに，$p_i(x) = q_i(x)(1 - B(x))$ なる関数 $q_i(x)$ を導入すると，$q_i(x)$ について次の微分方程式系を得る．

$$\frac{dq_1(x)}{dx} = -\lambda q_1(x) \tag{2・34}$$

$$\frac{dq_i(x)}{dx} = -\lambda q_i(x) + \lambda q_{i-1}(x), \quad i \geq 2 \tag{2・35}$$

式 (2・34)，式 (2・35) より，$q_i(x)$ の母関数 $Q(x,z) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(x)z^i$ について

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x,z) = -\lambda(1-z)Q(x,z) \tag{2・36}$$

なる微分方程式が得られ，これを解くことにより $Q(x,z) = e^{-\lambda(1-z)x}Q(0,z)$ のように求めることができる．$Q(0,z)$ が未知数として残るが，これは $p_i(x)$ の境界条件から求められる．

境界条件を導くため，サービスが始まった直後を考える．時刻 $t+\Delta t$ で系内客数が i であり，かつ客のサービスが開始された直後である場合，時刻 t で状態 $(i+1,x)$ であり，かつ Δt 内にサービス中の客のサービスが終了する必要がある．また，時刻 $t+\Delta t$ で経過サービス時間が Δt を超えることはない．よって，$0<\theta<1$ なる θ に対して次式を得る．

$$p_i(\theta\Delta t, t+\Delta t)\Delta t = \int_0^{\infty} p_{i+1}(x,t)\frac{b(x)}{1-B(x)}\Delta t dx + o(\Delta t), \quad i \geq 2 \tag{2・37}$$

定常状態を考え，$p_i(0) = q_i(0)$ に注意し，両辺を Δt で割り $\Delta t \to 0$ の極限に移行すると

$$q_i(0) = \int_0^{\infty} q_{i+1}(x)b(x)dx, \quad i \geq 2 \tag{2・38}$$

を得る．同様に考えると $i=1$ の場合について次式を得る．

$$q_1(0) = \int_0^{\infty} q_2(x)b(x)dx + \lambda p_0 \tag{2・39}$$

ただし，システムが空の状態から Δt 内に客が 1 人到着する場合に注意する．また，時刻 $t+\Delta t$ でシステムが空であるためには，時刻 t で状態 $(1,x)$ であり，かつ Δt 内にサービスが終了し，さらに客が到着しないことが条件であることから次式を得る．

$$\lambda p_0 = \int_0^{\infty} q_1(x)b(x)dx \tag{2・40}$$

式 (2・38)，式 (2・39) の両辺に z と z^i を掛け，さらに式 (2・40) とともに足し合わせれば $Q(0,z)$ が次のように求められる．

$$Q(0,z) = p_0 \frac{\lambda z(1-z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \tag{2・41}$$

ただし，$B^*(s)$ は $B(x)$ のラプラス－スティルチェス変換である．系内客数が i である定常分布 p_i についての確率母関数 $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ は，

$$p_i = \int_0^{\infty} p_i(x)dx, \quad i \geq 1 \tag{2・42}$$

と $p_i(x) = q_i(x)(1-B(x))$ を考慮し，式 (2・34)，式 (2・35) を使うことで

$$P(z) = p_0 \frac{(1-z)B^*(\lambda - \lambda z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \tag{2・43}$$

のように求められる．p_0 が未知数として残るが，正規化条件を使うことにより $p_0 = 1 - \rho$ であることが示される．よって再びポラチェックーヒンチンの公式を得たことになる．

2-3-2 $M/G/c/c$ システムとロバストネス[2)]

客の到着は本章 2-3-1 と同様に到着率 λ のポアソン過程に，客のサービス時間は分布関数が $B(x)$ で平均値が b の独立同一確率変数とするが，サービス窓口が c 個あるとする．客の到着時点で空き窓口が複数あればランダムに選択するが，窓口すべてがふさがっている場合は直ちにシステムから退去し損失となる． $X(t)$ を時刻 t における系内客数とする．$1 \le X(t) \le c$ に対して $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_{X(t)}(t)$ を $X(t)$ 人の客の残余サービス時間を順に並べた確率変数とすれば，$\{\eta(t) = (X(t), \zeta_1(t), \ldots, \zeta_{X(t)}(t)), t \ge 0\}$ はマルコフ過程を構成する．

以下では定常状態を仮定し，$p_0 = \lim_{t\to\infty} \Pr\{X(t) = 0\}$ と

$$p_i(x_1, \ldots, x_i)dx_1 \ldots dx_i = \lim_{t\to\infty} \Pr\{X(t) = i, x_k < \zeta_k(t) \le x_k + dx_k; 1 \le k \le i\} \tag{2・44}$$

なる $p_i(x_1, \ldots, x_i)$, $1 \le i \le c$ を考える．本章 2-3-1 と同様に微小区間 $(t, t + \Delta t)$ でのシステムの変化を考えると，方程式 $\lambda p_0 = p_1(0)$ と，次の微分方程式系が得られる．

$$-\sum_{k=1}^{i} \frac{\partial}{\partial x_k} p_i(x_1, \ldots, x_i) = -\lambda p_i(x_1, \ldots, x_i) + \sum_{k=1}^{i+1} p_{i+1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_k, \ldots, x_i) \tag{2・45}$$

$$+ \lambda \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} p_{i-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_i) b(x_k), \quad 1 \le i < c \tag{2・46}$$

$$-\sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial x_k} p_c(x_1, \ldots, x_c) = \lambda \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{c} p_{c-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_c) b(x_k) \tag{2・47}$$

ただし，$i = 1$ での右辺第 3 項は p_0 と同一視する．また，空き窓口をランダムに選択することから，サービス時間 x_1 の客の到着により状態が $(i-1, x_2, \ldots, x_i)$ から $(i, x_1, x_2 \ldots, x_i), \ldots,$ $(i, x_2, x_1 \ldots, x_i), (i, x_2, \ldots, x_i, x_1)$ の i 種類の状態のうち $(i, x_1, x_2 \ldots, x_i)$ を等確率 $1/i$ で選択し推移することに注意する．ここで，$p_i(x_1, \ldots, x_i)$ を次のように仮定する．

$$p_i(x_1, \ldots, x_i) = \frac{\lambda^i}{i!} p_0 \prod_{k=1}^{i} [1 - B(x_k)] \tag{2・48}$$

式 (2・48) は微分方程式系を満たし，また解は一意であるのでこれが解である．$p_i(x_1, \ldots, x_i)$ を $x_1, \ldots, x_i$ について積分すると，$\rho = \lambda b$ として系内客数が i である定常分布 p_i が

$$p_i = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty p_i(x_1, \ldots, x_i) dx_1 \ldots dx_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0 \tag{2・49}$$

のように求まる．p_0 は正規化条件 $\sum_{i=0}^{c} p_i = 1$ から次のように決まる．

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} \tag{2・50}$$

式 (2･49)，式 (2･50) から $M/G/c/c$ システムにおける系内客数の定常分布は $M/M/c/c$ のそれと等しく，サービス時間分布については平均値のみにしか依存しないことが分かる．このような性質をもつシステムは不感性をもつとか，ロバストネスがあるといわれる．

■参考文献

1) 藤木正也, 雁部穎一, 通信トラヒック理論, 丸善, 1980.
2) J. Medhi, Stochastic Models in Queueing Theory, Academic Press, 2003.

■5 群 - 1 編 - 2 章

2-4 行列幾何法によるマルコフモデル

（執筆者：河西憲一）［2008 年 10 月 受領］

既に見たように，$GI/M/1$ システムにおいて客の到着直前で観測する系内客数の定常分布は幾何分布で与えられる．本節では $GI/M/1$ システムに特徴的なある種の構造を一般化して得られるクラスのマルコフ連鎖について説明する．

2-4-1 $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖[1)]

2 次元状態空間 $\mathcal{S} = \{(k,i) : k \in \mathcal{N}, i \in \mathcal{I}\}$ 上の離散時間マルコフ連鎖 $\{X_n = (k_n, i_n), n \geq 0\}$ について考える．ただし，$\mathcal{N} = \{0, 1, \ldots\}, \mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, M\}$ であり，$M < \infty$ とする．この状態空間を $\ell(k) = \{(k,1), (k,2), \ldots, (k,M)\} = \{(k,i) : i \in \mathcal{I}\}$ によって $\bigcup_{k\in\mathcal{N}} \ell(k)$ のように分割したとき，$\ell(k)$ をレベル k の状態とか単にレベル k と呼ぶ．また，$\ell(k) = \{(k,i) : i \in \mathcal{I}\}$ の i を状態 (k,i) のフェーズと呼ぶ．以下，X_n から X_{n+m} への推移確率が n に依存しない，すなわち斉時なマルコフ連鎖のみを考える．

マルコフ連鎖 $\{X_n = (k_n, i_n), n \geq 0\}$ が状態 (k_n, i_n) から状態 (k_{n+1}, i_{n+1}) へ推移する場合で，$k_{n+1} = k_n$ または $k_{n+1} = k_n + 1$，あるいは $k_{n+1} = k', k' \in \{0, 1, \ldots, k_n - 1\}$ に推移が限られるとき，$\{X_n, n \geq 0\}$ を $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖と呼ぶ．特に，$k_n \geq 1$ あるいは $k_{n+1} \geq 1$ について状態 (k_n, i_n) から状態 (k_{n+1}, i_{n+1}) への推移確率が k_n と k_{n+1} の特別な値には依存せず，i_n と i_{n+1}，及び $k_{n+1} - k_n$ にのみ依存する場合を，レベルに依存しない $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖と呼ぶ．よって，このとき $\{X_n = (k_n, i_n), n \geq 0\}$ の推移確率行列 P は

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & O & \cdots \\ B_1 & A_1 & A_0 & \cdots \\ B_2 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2・51}$$

のような構造をもつ．ただし，$A_k, B_k, k \geq 0$ は M 行 M 列の非負行列であり，P が確率行列であることから

$$\left(B_k + \sum_{i=0}^{k} A_i \right) \mathbf{1}^\top = \mathbf{1}^\top, \qquad k \geq 0 \tag{2・52}$$

を満たす．ここで，$\mathbf{1}^\top$ は要素がすべて 1 である行ベクトル $\mathbf{1}$ を転置した列ベクトルである．以下，単に $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖といえば式 (2・51) の推移確率行列をもつ場合を指すことにする．$GI/M/1$ 型マルコフ連鎖の推移構造の性質として次の 2 点が挙げられる．

性質 1 1 ステップの推移によりレベルは高々一つしか増えない．

性質 2 レベル $k+n$ からレベル k に 1 ステップで推移する確率は k によらない．

特に性質 1 により，$\ell(k)$ から $\ell(k+n)$ に到達するためには途中の $\ell(k+1), \ell(k+2), \ldots, \ell(k+n-1)$ をすべて通過する必要がある．すなわち，途中の状態を通り過ぎることができない．この二

つの性質が $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖の定常分布を特徴づける上で本質となる．

2-4-2 行列幾何形式解[2)]

以下では $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖が既約で非周期的で正再帰的，すなわちエルゴード的であるとする．このとき，$k \in \mathcal{N}$ と $i \in \mathcal{I}$ についての $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖の定常分布 $\pi_{(k,i)}$ は，平衡方程式 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$ と正規化条件 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{1}^\top = 1$ の解として得られる．ただし，$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots, \boldsymbol{\pi}_n, \ldots)$ であり，$\boldsymbol{\pi}_k = (\pi_{(k,1)}, \pi_{(k,2)}, \ldots, \pi_{(k,M)}), k \geq 0$ である．これは未知数が無限個の連立方程式を解くことを意味する．一方，$GI/M/1$ 型マルコフ連鎖の場合は推移確率行列の構造から，$\boldsymbol{\pi}_n$ に対し非負正方行列 R が存在して

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_0 R^n, \quad n \geq 1 \tag{2・53}$$

なる関係が成立することが知られている．ただし，R は行列についての非線形方程式

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R^n A_n \tag{2・54}$$

を満たす非負最小解である．定常分布 $\boldsymbol{\pi}_0$ はレベル 0 における平衡方程式に式 (2・53) を代入し，さらに正規化条件 $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_n \mathbf{1}^\top = 1$ から次の連立方程式を解くことで求められる．

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\pi}_0 B(R) = \boldsymbol{\pi}_0 \sum_{n=0}^{\infty} R^n B_n \tag{2・55}$$

$$1 = \boldsymbol{\pi}_0 (I - R)^{-1} \mathbf{1}^\top \tag{2・56}$$

ただし，I は単位行列である．また，$B(R)$ は非負行列であり，$B(R)\mathbf{1}^\top = \mathbf{1}^\top$ となることも示されるので確率行列である．

式 (2・53) は $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖の定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}_n$ が行列 R の幾何形式で表現できることを意味するので行列幾何形式解と呼ばれる．$GI/M/1$ システムにおける到着直前の定常分布は幾何分布で与えられるが，式 (2・53) は $GI/M/1$ システムの結果が行列の幾何形式で一般化され得ること意味する．さらに，R と $\boldsymbol{\pi}_0$ が求められれば未知数が無限個の連立方程式を解かずとも定常分布が決定できることも意味する．R が決まれば $\boldsymbol{\pi}_0$ は式 (2・55), 式 (2・56) を解くことで求められるので，結局 R を求めることが鍵となる．R を計算する方法として式 (2・54) 自身を数値的に反復計算する方法が考えられる．すなわち，要素がすべて 0 である行列を初期値 $R(0)$ として，n 回目の反復によって得られる $R(n)$ を

$$R(n) = \left(A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} [R(n-1)]^k A_k \right) (I - A_1)^{-1}, \quad n \geq 1 \tag{2・57}$$

に基づき計算する方法である．このような反復計算の結果得られる $\{R(n), n \geq 0\}$ は単調非減少な非負行列の列をなし，さらに R に収束することも知られている．

2-4-3 R の確率的解釈[3)]

式 (2・53) の行列幾何形式解は $\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_{n-1} R, n \geq 1$ とも書くことができるが，このような形

式で表現できること，及び R の確率的な解釈は，マルコフ連鎖の禁止過程を考えると理解できる．マルコフ連鎖の禁止過程とは状態集合の一部に初めて到達するまでの推移のみに着目したマルコフ連鎖のことである．状態空間 $\mathcal{S}$ 上の既約な離散時間マルコフ連鎖 $\{X_n, n \geq 0\}$ を考える．$\mathcal{T}(\subset \mathcal{S})$ を禁止状態の集合とする禁止過程について，n ステップ推移確率 ${}_{\mathcal{T}}P_{i,j}(n)$ を次のように定める．

$$
{}_{\mathcal{T}}P_{i,j}(n) = \Pr\{X_n = j, \tau \geq n \,|\, X_0 = i\} \tag{2・58}
$$

ただし，τ は $\mathcal{T}$ への初到達時間である．n ステップのうち最後に $\mathcal{T}$ を訪問した時点で条件づけることで $P_{i,j}(n) = \Pr\{X_n = j \,|\, X_0 = i\}$ は次式を満たす．

$$
P_{i,j}(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m \in \mathcal{T}} P_{i,m}(n-k)\, {}_{\mathcal{T}}P_{m,j}(k) \tag{2・59}
$$

$i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}$ であるとき，${}_{\mathcal{T}}P_{i,j}(n)$ を要素とする行列を ${}_{\mathcal{T}}P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(n)$ などと書くことにする．また，$\mathcal{A}$ の定常分布を $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}}$ と書くことにすると，式 (2・59) と $\{X_n, n \geq 0\}$ の既約性から $\mathcal{T}, \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ かつ $\mathcal{T} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ を満たす $\mathcal{T}, \mathcal{D}$ に対して

$$
\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{T}}\, {}_{\mathcal{T}}R_{\mathcal{T},\mathcal{D}} \tag{2・60}
$$

が成り立つことが示される．ただし，

$$
{}_{\mathcal{T}}R_{\mathcal{T},\mathcal{D}} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{\mathcal{T}}P_{\mathcal{T},\mathcal{D}}(n) \tag{2・61}
$$

である．ここで，禁止過程の考え方を $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖 $\{X_n = (k_n, i_n), n \geq 0\}$ に適用してみる．仮に $\mathcal{T} = \ell(0) \cup \ell(1) \cup \ldots \cup \ell(n-1), \mathcal{D} = \ell(n)$ とすると，$\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\pi}_n$ であり，$\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{T}} = [\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots, \boldsymbol{\pi}_{n-1}]$ と見なせるので，式 (2・60) から

$$
\boldsymbol{\pi}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\pi}_k\, {}_{\mathcal{T}}R_{\ell(k),\ell(n)} \tag{2・62}
$$

となる．$GI/M/1$ 型マルコフ連鎖の性質 1 から，$0 \leq k \leq n-2$ に対する $\ell(k)$ から出発した場合，途中禁止状態 $\mathcal{T} = \ell(0) \cup \ell(1) \cup \ldots \cup \ell(n-1)$ を訪問せずに $\ell(n)$ に到達することは不可能である．また，性質 2 から ${}_{\mathcal{T}}R_{\ell(n-1),\ell(n)}$ は n に依存しない．すなわち，${}_{\mathcal{T}}R_{\ell(n-1),\ell(n)}$ は n に関係なく ${}_{\mathcal{T}}R_{\ell(n-1),\ell(n)} = R$ と書ける．よって，式 (2・62) は $\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_{n-1}R$ の関係が成り立つことを意味する．また，式 (2・61) から R の ij 要素は $\ell(n-1)$ のある状態 i から出発し，次に $\mathcal{T}$ に到達するまでの間に $\ell(n)$ の状態 j を訪問する回数の平均を表すと解釈できる．

R の確率的解釈が明らかになると，式 (2・54) は次のように意味づけできる．左辺の各要素は $\ell(n-1)$ から出発し，次に $\mathcal{T}$ に到達するまでの間に $\ell(n)$ を訪問する回数の平均である．右辺はそのような訪問回数を最後に $\ell(n)$ に推移する確率で分類していると解釈できる．すなわち，まず A_0 で $\ell(n-1)$ から $\ell(n)$ に訪問するか，R で $\ell(n)$ の平均訪問回数を計測してからさらに A_1 で $\ell(n)$ に訪問するか，R^2 で $\ell(n+1)$ の平均訪問回数を計測した後に A_2 で $\ell(n)$ に訪問するか，などに分割できることを示している．

■参考文献

1) 牧本直樹, 待ち行列アルゴリズムー行列解析アプローチー, 朝倉書店, 2001.
2) M.F. Neuts, Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach, Johns Hopkins University Press, 1981.
3) G. Latouche and V. Ramaswami, Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling, SIAM, 1999.