■5 群（通信・放送）－ 1 編（待ち行列理論とシミュレーション）

3 章 拡散近似法（非マルコフモデル近似式導出法）

（執筆者：高橋敬隆）［2010 年 9 月 受領］

■概要■

待ち行列システムは，適切に状態を取るとマルコフモデルになり，いわゆるマルコフ過程論を用いて，システム性能評価尺度が得られる．例えば，到着過程がポアソン，サービス時間が一般分布に従う M/G/1 システムは任意時刻における系内客数過程だけではマルコフ過程にならないため，状態として 2 次元ベクトルを考え，系内客数の他に残余サービス時間を考えると，マルコフ過程となり，時刻 t と時刻 $t + \Delta t$ の状態を観察することにより微分方程式が得られる．この場合，到着過程が無記憶でマルコフ的であることを本質的に用いている．連続状態空間の次元（M/G/1 システムの例では 1）が 2 以上になると得られた微分方程式を解くことが困難となる．そのため近似法が重要となってくる．

到着過程もサービス時間も共にマルコフ的でない場合，非マルコフモデルと呼ばれる．非マルコフモデルに対する近似法は複数存在するが，残念ながら，これが最良の近似法というものは現在のところなく，待ち行列システムの特徴に応じて時に発見的に提案され利用されている．本章では，それらの近似法の中でも，普遍性を持ち，システム性能尺度が結果的に容易に得られる拡散近似法について紹介・解説している．

【本章の構成】

本章では，拡散近似において中心的な役割を果たす拡散方程式を紹介し（3-1 節），最も基本的な非マルコフモデルである GI/GI/1 システムに対する仮待ち時間過程を拡散近似する（3-2 節）．境界条件として，反射壁境界および基本復帰境界を設定している．基本復帰境界の場合の，Gelenbe の結果の誤りについても指摘している．最後に，その他の待ち行列システムに対する拡散近似について言及している（3-3 節）．

■5 群 - 1 編 - 3 章

3-1 拡散方程式

（執筆者：高橋敬隆）［2010 年 9 月 受領］

非マルコフ待ち行列システムにおけるシステム性能評価尺度を得るために, 系内客数過程あるいは仮待ち時間過程を拡散方程式で記述する定式化のことを拡散近似（diffusion approximation）という．拡散方程式の紹介から本章を始めよう．

連続時間・連続状態を持つマルコフ過程 $\{X(t)\}$ に対して，$X(t)$ の確率密度関数（probability density function: pdf）$f(x,t)$，すなわち，

$$f(x,t)dx = P\{x \leq X(t) < x + dx\} \tag{3・1}$$

は，ある数学的条件（n 次無限小積率 $a_n(x,t)$ の存在や $f(x,t), a_n(x,t)$ の正則（微分可能）性など）の下に，次の確率偏微分方程式を満たすことが知られている（証明は文献 2) 参照）．

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x,t) f(x,t)] \tag{3・2}$$

式 (3・2) 右辺で，2 次以上の無限小積率を無視して $a_n(x,t) = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots)$ と置いたときの 1 階偏微分方程式を流体方程式と呼ぶ．流体方程式による定式化を流体近似（fluid approximation）と呼ぶ．流体近似はシステム処理能力を越えた場合のいわゆるラッシュアワー問題の過渡解析に威力を発揮する．しかしながら，定常状態における待ち行列システムの流体方程式解（定常解）はいつもシステムが空となり意味を成さないことが多い．

そこで，2 次無限小積率 $a_2(x,t)$ までを考えよう．すなわち，式 (3・2) 右辺で 3 次以上の無限小積率を無視して $a_n(x,t) = 0 \quad (n = 3, 4, \ldots)$ と置いたときである．このときのマルコフ過程は拡散過程（diffusion process）とも呼ばれ，空間変数 x に関して 2 階，時間変数 t に関して 1 階の偏微分方程式を拡散方程式（diffusion equation）と呼ぶ．従って，原理的に拡散近似は流体近似を特殊な場合として含んでいる．拡散方程式は Fokker-Planck 方程式とも呼ばれている．

■5 群 - 1 編 - 3 章

3-2 GI/GI/1 システム

（執筆者：高橋敬隆）[2010 年 9 月 受領]

説明を簡単にするため，最も基本的な GI/GI/1 システムに対象を絞る．客の到着間隔は互いに独立で同一分布に従う（independent, and identically distributed: iid）とする．このとき客の到着過程は再生過程（renewal process）に従う．サービス時間は互いに独立で同一分布に従う（iid）とする．更に，到着過程とも独立とする．サーバ数は 1 で無限容量の待ち室を持ち，サービス規律を先着順と仮定する．

対象システム（GI/GI/1）において，次の記号を準備する．

λ: 到着率（$= 1/E(A)$, 平均到着間隔の逆数）

C_A: 客の到着間隔 A の変動係数（$C_A^2 := Var(A)/E(A)^2$）

μ: サービス率（$= 1/E(S)$, 平均サービス時間の逆数）

C_S: 客のサービス時間 S の変動係数（$C_S^2 := Var(S)/E(S)^2$）

このときのトラフィック密度（traffic intensity, 1 人の客の平均サービス時間あたりの平均到着客数）ρ は，1 サーバで無限容量待ち室をもつ［客の溢れ（overflow）がない］ため，サーバ稼働確率，あるいは利用率（utilization）とも一致し，次式で与えられる．

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{3・3}$$

定常状態における平均サーバ内客数，サーバ稼働確率，利用率は全て ρ である．

系内客数過程による拡散近似については既に，Newell[1]，Kleinrock[2]，Gelenbe-Mitrani[3]で詳細に紹介されているため，本章では高橋[5]に従い，仮待ち時間過程による拡散近似を紹介する．

仮待ち時間過程を拡散近似する着想は, Gelenbe[4]の先駆的な論文に記載されている．しかし，定常確率密度関数 $f(x)$ 導出の際の微分方程式解に初等的な誤り（文献 4), p.300, Propositions 3, 4 の $f(x)$ の第 1 因子は $\Lambda P/b$ ではなく $2\Lambda P/\alpha$ の誤り）がある．その上，（時間平均である）平均仮待ち時間 $E(V)$ を（サンプル平均である）待ち時間平均 $E(W)$ と見なしてリトルの公式を適用しているため理論的にも不完全なものである．高橋[5]では $E(V)$ と $E(W)$ の関係式を用いることにより Gelenbe[4]の着想を完全なものにしている．

後述するが，仮待ち時間過程を拡散近似した際の精度が良い事については Gelenbe 自身（上述した誤りと理論的不完全性ゆえ）気づいていなかったようである．事実，Mitrani と共著で教科書[3]をものする際，仮待ち時間過程による拡散近似ではなく系内客数過程による拡散近似をあえて採用している．

仮待ち時間過程 $\{V(t)\}$ は，一般に連続状態を持つマルコフ過程にはならない．しかし，マルコフ過程と見なし拡散近似する．連続状態を持つマルコフ過程と見なすことの妥当性に関連して，到着過程が正規分布に収束する様子を例えば，Kleinrock[2]は 2 章 2-3 節 Diffusion Processes において（統計学における中心極限定理を用いて）解説している．今後，このモデ

ル化を単に仮待ち時間過程拡散近似と呼ぶことにする．

待ち行列システムの拡散近似には, 拡散方程式に支配されるという制限の他に,（仮待ち時間が負にならないための）境界条件が必要である．境界条件として Newell[1], Heyman[6], Kobayashi[7] らが取り扱った反射壁（Reflecting barrier: RB）と Feller[8]，Gelenbe[3, 4]，Kimura[9, 10] らが取り扱った基本復帰（Elementary return: ER）境界がある．

反射壁境界は，拡散方程式に支配されるサンプルパスが（拡散粒子がパスを描くと見なすと拡散粒子自身が）原点 ($x = 0$) から負の領域に行くことを禁じるもので，（GI/GI/1 を始め多くのシステムの）重負荷極限定理（heavy traffic theorem）の数学的証明に使われている．ただ，原点に滞在する確率が存在しないため，軽負荷では近似精度が劣るという欠点を持ちうる．すなわち，反射壁境界と置いたからといって他のシステム性能評価尺度（例えば平均待ち時間）が負にならない保証はない（後述の例参照）．

基本復帰境界は，原点 ($x = 0$) に拡散粒子が達したとき指数分布に従う間，拡散粒子が原点に滞在し，指数分布時間が経過した直後,（仮待ち時間過程を考えているから）到着客がシステムにもたらすサービス時間確率密度関数（pdf $s(x)$）で，拡散粒子は x へ原点から jump する．その jump した場所から拡散粒子は拡散方程式に支配される運動を再び始める．

Gelenbe[4]は，原点滞在時間を Cox の位相型分布（一般分布）に拡張した場合を考察し，一般化した境界を 瞬間復帰（instantaneous return）境界と呼んでいる．ただ，既存理論（G/G/1 では原点滞在確率は $1 - \rho$）との整合性を考えると，原点滞在時間分布は平均値のみに依存し，結果的に指数分布と同じになることを示している．従って，電子情報通信工学上は基本復帰境界で十分である．

まず，反射壁境界のある拡散近似を取り扱う．このとき，時刻 t における仮待ち時間 $V(t)$ の確率密度関数（probability density function: pdf）$f(x, t)$ は次式を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}[a_1(x,t) f(x,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[a_2(x,t) f(x,t)] \tag{3・4}$$

$$0 = \lim_{x\to 0+}\{-a_1(x,t) f(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[a_2(x,t) f(x,t)]\} \tag{3・5}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x,t) = 0 \tag{3・6}$$

正規化条件は，全確率が 1 であるため次式となる．

$$\int_{(0,\infty)} f(x,t)dx = 1 \tag{3・7}$$

（無限小積率）拡散方程式に現われる 1 次・2 次無限小積率は，対象システムの到着間隔やサービス時間が iid なため，以下で表される（時刻 t にも場所 x にも依存しない）．

$$a_1(x,t) = \alpha = \lim_{t\to\infty}\frac{E(V(t))}{t} = \rho - 1 \tag{3・8}$$

$$a_2(x,t) = \beta = \lim_{t\to\infty}\frac{Var(V(t))}{t} = \frac{\rho(C_A^2 + C_S^2)}{\mu} \tag{3・9}$$

式 (3・8)，式 (3・9) の計算には，中心極限定理と特性関数を用いる．具体的には高橋［文献 5), 3.3 節］参照.

なお，Kleinrock[2]の 2 次無限小積率の計算では再生過程入力に対しても到着過程の無記憶性を暗黙裡に用いている．すなわち，微小区間 Δt に客が到着する確率を $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ として計算しているため，ポアソン到着の時しか Kleinrock の 2 次無限小積率式［文献 2)，p.73, 式 (2.122)］は成立しない．再生過程入力時には式 (3・9) が正しい.

注意すべき点は，微小区間 Δt の確率挙動を Δt で除する無限小積率の定義式（例えば，文献 2) 参照）を直接計算しているのではなく，長い観測時間 T の確率挙動を T で除して極限をとっている所である．定常性により，この両者は等しい．境界条件をあえて考慮に入れない（ロングランでは拡散粒子が負の領域 $x < 0$ に入ってしまう）仮待ち時間過程を考え，この無限小積率を求めている（境界条件を考慮すると逆に長い観測結果を使えない）．従って，式 (3・8)，式 (3・9) は反射壁境界のみならず基本復帰境界のときも成立つことに注意しよう.

いずれにせよ, GI/GI/1 システムにおける仮待ち時間過程拡散近似では, 無限小積率 $a_1(x,t) = \alpha, a_2(x,t) = \beta$ が定数故，微分作用素の外に出るため解析しやすい．反射壁境界のある拡散近似では，陽な過渡解[1]が知られている．定常解は容易に得られる．実際，定常状態における $f(x,t), V(t)$ を $f(x), V$ などと略記すると，

$$f(x) = -\frac{2\alpha}{\beta}\exp(2\alpha x/\beta) \tag{3・10}$$

で与えられる（文献 1, 6) 参照）．平均仮待ち時間 $E(V)$ は次式となる.

$$\begin{aligned} E(V) &= \int_{(0,\infty)} x f(x) dx \\ &= -\frac{\beta}{2\alpha} \\ &= \frac{\rho(C_A^2 + C_S^2)}{2(1-\rho)\mu} \quad (\rho < 1) \end{aligned} \tag{3・11}$$

なお，反射壁のある拡散近似から得られる定常仮待ち時間 V の pdf $f(x)$ が存在するための条件 $\rho < 1$ は厳密な GI/GI/1 解析から得られるシステム定常条件と一致することに注意する.

平均仮待ち時間 $E(V)$ と平均待ち時間 $E(W)$ の関係式は，サンプルパス解析（Brumelle の公式），点過程論（Miyazawa の率保存則），あるいは Ross のコスト方程式により求められる（文献 5, 11, 12) 参照）．以下の関係式が GI/GI/1 システムに対して成り立つ.

（平均仮待ち時間 $E(V)$ と平均待ち時間 $E(W)$ の関係式）

$$E(V) = \rho E(W) + \frac{\lambda E(S^2)}{2} \tag{3・12}$$

反射壁境界のある拡散近似で得られた $E(V)$ を「$E(V)$ と $E(W)$ の関係式」に代入して，$E(W)$ について解けば,

$$E(W) = \frac{(C_A^2 - 1) + \rho(C_S^2 + 1)}{2(1-\rho)\mu} \quad (\rho < 1) \tag{3・13}$$

上式が反射壁境界のある仮待ち時間過程拡散近似による平均待ち時間公式である.

平均待ち客数 $E(Q)$ は，リトルの公式[11]により

$$E(Q) = \lambda E(W) \tag{3・14}$$

平均系内時間 $E(T)$ は

$$E(T) = E(W) + \frac{1}{\mu} \tag{3・15}$$

平均系内客数 $E(L)$ は再びリトルの公式により

$$\begin{aligned} E(L) &= \lambda E(T) \\ &= \frac{\rho[(C_A^2 - 1) + \rho(C_S^2 + 1)]}{2(1-\rho)} + \rho \quad (\rho < 1) \end{aligned} \tag{3・16}$$

で与えられる．

次に，基本復帰境界のある仮待ち時間過程拡散近似を取り扱う．原点 $(x = 0)$ における拡散粒子の滞在時間が指数分布に従うとすると，時刻 t における仮待ち時間 $V(t)$ の確率密度関数 pdf $f(x,t)$ は次式を満たす（無限小積率は反射壁境界の解析で求めたものと同一である．それらが定数であることを考慮した形で記述する）．

（基本復帰境界のある拡散近似）

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) + \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) + \lambda \pi_0(t) s(x) \tag{3・17}$$

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda \pi_0(t) + \lim_{x\to 0+}\left[-\alpha f(x,t) + \frac{\beta}{2}\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right] \tag{3・18}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x,t) = \lim_{x\to\infty} f(x,t) = 0 \tag{3・19}$$

ここで，$\pi_0(t)$ は拡散粒子の原点 $(x = 0)$ における滞在確率である．（基本復帰境界ではなく）反射壁のある拡散近似式 (3・4) 右辺を空間上 (dx) で積分すると，それは出生死滅過程における確率フローと同じ物理的意味を持つ．この物理的意味から，出生死滅過程の議論と同様に，基本復帰境界のある拡散近似式が自然に解釈される．例えば，式 (3・18) は時刻 t と $t + \Delta t$ で状態を高位の無限小 $o(\Delta t)$ を入れて観察・表現し，$\pi_0(t)$ を左辺に移行して両辺を Δt で除した後，Δt の極限をとる（$\Delta t \to 0$）と当該微分方程式が得られる．

正規化条件は次式となる．

$$\pi_0(t) + \int_{(0,\infty)} f(x,t)dx = 1 \tag{3・20}$$

反射壁境界のある拡散近似では，陽な過渡解[1]が知られていたが，基本復帰境界のある拡散近似では，陽な過渡解がまだ知られていない．しかし，定常解は容易に得られる．実際，定常状態における $f(x,t), V(t)$ を $f(x), V$ などと略記すると，定常仮待ち時間 V の pdf $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{2\lambda\pi_0}{\beta}\exp(2\alpha x/\beta)\int_{(0,x)}(1 - S(y))\exp(-2\alpha y/\beta)dy \tag{3・21}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \quad (\rho < 1) \tag{3・22}$$

で与えられる．ここで $S(x)$ はサービス時間分布の累積分布関数 CDF（cumulative distribution function）である．式 (3･21)，式 (3･22) は高橋［文献 5)，式 (20)，式 (22)］の特別な場合に相当する．一方，Gelenbe［文献 4)，式 (41) など］には，計算ミスが見られ，$f(x)$ の第 1 因子は $\Lambda P/b$ ではなく $2\Lambda P/\alpha$ と訂正すべきである．

拡散近似から得られる定常条件 $\rho < 1$ ならびにシステム空きの確率は厳密な GI/GI/1 解析結果と一致していることに注意する（システム空きの確率は反射壁境界の場合は存在しなかったことにも注意する）．

定常状態における平均仮待ち時間 $E(V)$ は次式となる（高橋［文献 5)，式 (27)］の特別な場合に相当）．

$$\begin{aligned} E(V) &= \int_{(0,\infty)} x f(x)dx \\ &= \frac{\lambda E(S^2)}{2} - \frac{\rho\beta}{2\alpha} \end{aligned} \tag{3・23}$$

反射壁境界のときの解析と同様，式 (3･23) を平均仮待ち時間 $E(V)$ と平均待ち時間 $E(W)$ の関係式[5, 11, 12]，

$$E(V) = \rho E(W) + \frac{\lambda E(S^2)}{2} \tag{3・24}$$

に代入して，$E(W)$ について解けば次式を得る．

$$\begin{aligned} E(W) &= -\frac{\beta}{2\alpha} \\ &= \frac{\rho(C_A^2 + C_S^2)}{2(1-\rho)\mu} \quad (\rho < 1) \end{aligned} \tag{3・25}$$

式 (3･25) が基本復帰境界のある仮待ち時間過程拡散近似による平均待ち時間公式である．

平均待ち客数 $E(Q)$ は，リトルの公式[11)]により

$$E(Q) = \lambda E(W) \tag{3・26}$$

平均系内時間 $E(T)$ は

$$E(T) = E(W) + \frac{1}{\mu} \tag{3・27}$$

平均系内客数 $E(L)$ は，再びリトルの公式により

$$\begin{aligned} E(L) &= \lambda E(T) \\ &= \frac{\rho^2(C_A^2 + C_S^2)}{2(1-\rho)} + \rho \quad (\rho < 1) \end{aligned} \tag{3・28}$$

で与えられる．

ここまで仮待ち時間過程を拡散近似して，GI/GI/1 における平均性能評価尺度を導出したが，その精度について若干触れておこう．

まず，重負荷のときを考える．仮待ち時間過程拡散近似では，反射壁境界・基本復帰境界双方の平均待ち時間公式は次式

$$\lim_{\rho \to 1} 2(1-\rho)\mu E(W) = C_A^2 + C_S^2 \tag{3・29}$$

を満たしている．この漸近的挙動は系内客数過程拡散近似を取り扱った Gelenbe[3], Heyman[6], Kobayashi[7]らの結果と一致している．

次に, Whitt[13]が指摘しているように, 系内客数過程拡散近似（Gelenbe[3], Heyman[6], Kobayashi[7]）では，そのどれもがポアソン到着（指数到着間隔分布，$C_A = 1$）する M/G/1 待ち行列システムに対する厳密解，所謂，Pollaczek-Khinchine（P-K）公式[2, 11]

$$E(W) = \frac{\rho(1+C_S^2)}{2(1-\rho)\mu} \quad (\rho < 1) \tag{3・30}$$

に一致しない．しかるに，高橋[5]が指摘しているように，本章で展開した仮待ち時間過程拡散近似では，反射壁境界・基本復帰境界のどちらの場合も，厳密解（P-K 公式）に一致することが分かる．従って，迂回呼（溢れパケット）や再呼（再送パケット）が加わる情報通信ネットワークのように，客の到着間隔の変動係数が 1 よりわずかに大きい）超指数分布（断続ポアソン過程, Interrupted Poisson Process: IPP[11]）に対しては，系内客数過程拡散近似よりは仮待ち時間過程拡散近似の方が良い精度を持つと思われる．

仮待ち時間過程拡散近似において，反射壁と基本復帰の境界はどちらの精度が良いだろうか？到着間隔・サービス時間が共に一定の D/D/1 システム ($C_A = C_S = 0$) では，確率的変動のない極端な場合であるが，反射壁境界のある拡散モデルでは，$E(W) = -1/(2\mu) < 0$ であるのに対し，基本復帰境界のある拡散モデルでは $E(W) = 0$ となり後者が合理的である．従って，明らかに，到着間隔ならびにサービス時間の変動係数が小さいときは基本復帰境界の方が反射壁のときより精度が良い．GI/GI/1 システムに対する更なる精度比較については，Nonaka-Hoshi-Takahashi-Komatsu[14]を参照.

Whitt[13]は，本章で紹介した基本復帰境界のある仮待ち時間過程拡散近似を除く全ての拡散近似を検証し，それらを（精度の観点から）凌駕する MFR（monotone failure rate）近似式［文献 13)，式 (23)］を提案している．しかし，Whitt の MFR 近似式（—系内客数過程拡散近似の結果をポアソン到着するときは P-K 公式を満たすように発見的に修正した Gelenbe の近似式でもある—）は，本章で述べた基本復帰境界のある仮待ち時間過程拡散近似の結果と一致している．すなわち，Whitt[13]の数値例からいえることは，基本復帰境界のある仮待ち時間過程拡散近似が精度の点からは最良である．

さて，GI/GI/1 システムに限っていえば，どの拡散近似も Kraemer and Langenbach-Beltz の近似式[15]にその精度において適わない．しかし，彼らは拡散近似による陽公式を基に計算機シミュレーション結果と対比しながら補正しつつ近似式を見い出したのである．その意味で拡散近似は重要である．

また，仮待ち時間過程拡散近似は多呼種入力の際，威力を発揮する．例えば，ポアソン過

程と断続ポアソン過程が重畳した M+IPP 入力の場合，再生過程（GI）にはならず，Kraemer and Langenbach-Beltz 近似式が直接適用できないが，重畳過程の無限小積率は計算でき，拡散近似が可能である．詳細は高橋[5)]参照．

■参考文献

1) G.F. Newell, “Applications of Queueing Theory,” 2nd ed., Chapman & Hall, London, 1982.
2) L. Kleinrock, “Queueing Systems, Volume II: Computer Applications,” John Wiley and Sons, New York, 1976.
3) E. Gelenbe and I. Mitrani, “Analysis and Synthesis of Computer Systems,” Academic Press, New York, 1980.
4) E. Gelenbe, “Probabilistic models of computer systems, Part II, Diffusion approximations, waiting times and batch arrivals,” Acta Informatica, vol. 12, pp.285-303, 1979.
5) 高橋敬隆, “多呼種集団到着単一サーバモデルの拡散近似解析,” 電子通信学会論文誌，vol.J69-A, no.3, pp.317-324, 1986.
6) D.P. Heyman, “A diffusion model approximation for the GI/G/1 queue in heavy traffic,” Bell System Tech. J., vol.54, pp.1637-1646, 1975.
7) H. Kobayashi, “Applications of the diffusion approximations to queueing networks, I: equilibrium queue distributions,” J. ACM., vol.21, pp.316-328, 1974.
8) W. Feller, “Diffusion processes in one dimension,” Trans. Amer. Math Soc., vol.77, pp.1-31, 1954.
9) T. Kimura, “Diffusion approximation for an M/G/m queue,” Operations Research, vol.31, no.2, pp.304-321, 1983.
10) T. Kimura, “A unified diffusion model for the state-dependent queues,” Optimization, vol.18, pp.265-283, 1987.
11) 川島幸之助, 町原文明, 高橋敬隆, 斎藤洋, “通信トラヒック理論の基礎とマルチメディア通信網,” (電子情報通信学会編), 1995.
12) S.M. Ross, “Introduction to Probability Models,” Academic Press, San Diego, 1993.
13) W. Whitt, “Refining diffusion approximations for queues,” Operations Research Letters, vol.1, no.5, pp.165-169, 1982.
14) Y. Nonaka, K. Hoshi, Y. Takahashi, and N. Komatsu, “A further remark on diffusion approximations with elementary return and reflecting barrier boundaries,” Proceedings of International Conference on Operations Research (Munich 2010), I.6, WE-15, pp.1-6, 2010.
15) W. Kraemer and M. Langenbach-Beltz, “Approximate formulae for general single server systems with single and batch arrivals,” Angewandte Informatik, vol.9, pp.396-402, 1978.

■5 群 - 1 編 - 3 章

3-3 その他の一般的な待ち行列システム

（執筆者：高橋敬隆）［2010 年 9 月 受領］

Takahashi ら[1)]は，本章で紹介した基本復帰境界のある仮待ち時間過程拡散近似だけが変形（modified）サービス構造のある待ち行列システムを解析できることを示した．変形サービス構造システムは準備時間（set-up time）を要するサービスシステムを特殊な場合として含み，サービス時間列は iid にはならない．反射壁境界のある仮待ち時間過程拡散近似や（基本復帰境界・反射壁境界のある）系内客数過程拡散近似では，変形サービス構造のある待ち行列システムは解析できないのである．

Takahashi ら[2)]は，有限容量複数サーバ GI/GI/c/K システムに対する系内客数過程拡散近似における境界条件・離散化の組み合せが精度に及ぼす影響をシミュレーション結果と比較して明らかにしている．

閑話休題（技術的な詳細はさておき），総じて拡散近似は待ち行列システムの特徴をその無限小平均・無限小分散と境界条件で表現していて，簡単かつ解析力に優れている．広範な待ち行列システムに適用可能である．簡単なサービス構造を持つ非マルコフ待ち行列システムに対しては，陽な近似公式が得られる一方，重負荷を除き満足な精度が得られないことが Whitt[3)]により指摘されている．特殊な場合に知られている既存公式（厳密解）と一致するような修正や，シミュレーション実験により補正される事が望ましい場合も実際にある．しかしながら，初めからいきなりシミュレーション実験結果に頼るより，拡散近似解析しておいてその結果を適宜修正していくアプローチは，最も有用な近似手法であることに間違いはない．新しい方式・サービスシステムが提案されるごとにそれらの方式・システム性能評価のため，拡散近似は今後も積極的に適用され，活発に研究されるだろう．拡散近似の情報通信分野へのサーベイは Kimura[4)]参照．電子商取引に現れる Web 系への応用については Takahashi ら[5)]参照.

■参考文献

1) Y. Takahashi, Y. Shikata, and A. Frey, “A single-server queueing system with modified service mechanism: An application of the diffusion process,” Proceedings of IEEE International Conference on Ultra Modern Telecommunications (ICUMT2009), pp.1-6, 2009.

2) A. Takahashi, Y. Takahashi, S. Kaneda, and N. Shinagawa, “Diffusion approximations for the G/G/c/K queue,” Proceedings of 16th IEEE International Conference on Computer Communications and Networks, pp.681-686, 2007.

3) W. Whitt, “Refining diffusion approximations for queues,” Operations Research Letters, vol.1, no.5, pp.165-169, 1982.

4) T. Kimura, “Diffusion models for queues in computer/communication systems,” Economic Journal of Hokkaido University, vol.33, pp.37-52, 2004.

5) Y. Takahashi, Y. Shikata, and A. Frey, “Diffusion approximation for a web-server system with proxy servers,” Proceedings of International Conference on Operations Research (Munich 2010), I.6, TC-15, pp.1-6, 2010.

