■12 群（電子情報通信基礎）－ 1 編（解析学・代数学）

1 章 微積分

（執筆者：石橋幸男）［2009 年 1 月 受領］

■概要■

微積分学は，17 世紀後半にニュートン，ライプニッツによって体系化されて以降，長きにわたり多くの数学者の英知によって発展し，科学技術の基礎を支える非常に強力な道具として利用されている．微積分学の知識なしには，現代の科学技術は存在し得ないといっても過言ではない．

1-1 節では，まず数列の収束・発散，極限値を解説し，次に関数の極限，連続性，一様連続性などについて述べる．

1-2 節では，まず導関数の定義，片側微分係数などについて述べる．次に導関数の応用例であるロールの定理，平均値の定理，ロピタルの定理，テイラーの定理などについて解説し，関数の極大値・極小値についても言及する．

1-3 節では，不定積分（原始関数）の定義を示し，代表的な関数の不定積分を表にして示すと共に，不定積分を求めるために必要な種々の計算手法を示している．また，リーマン和の極限値として定積分が定義されること及び定積分が存在する条件についても述べる．最後に，被積分関数が積分区間で有界でない，あるいは積分区間が有界でない定積分（広義積分）についても述べる．

1-4 節では，まず 2 変数関数の極限値と連続性について解説する．次に，偏導関数及び高次偏導関数について述べ，2 変数関数の全微分可能性についても述べる．最後に，2 変数関数の極値について説明し，極値であるかどうかの判定方法，ならびに条件付極値問題を解く場合に有用なラグランジュの乗数法についても言及する．

1-5 節では，多変数関数の重積分も 1 変数関数の場合と同様，リーマン和の極限値として定義されること，及び積分可能条件を示している．最後に，重積分の計算手法である累次積分について述べると共に，広義積分にも言及している．

1-6 節では，変数分離形，同次形，線形の 1 階微分方程式，及び完全微分方程式について解説している．次に，定数係数の線形微分方程式の一般解について述べている．

1-7 節では，まず級数の基本性質について述べ，次に，正項級数の収束・発散の判定法であるコーシー・アダマールの判定法，ダランベールの判定法などについて述べる．最後に，関数列と関項級数の各点収束，一様収束などについて述べる．

【本章の構成】

本章では，関数と極限（1-1 節），微分（1-2 節），積分（1-3 節），偏微分（1-4 節），重積分（1-5 節），微分方程式（1-6 節），級数（1-7 節）に関して，定義，重要な定理，性質，公式などについて必要最小限度と思われる範囲で述べる。

■12 群 - 1 編 - 1 章

1-1 関数と極限

（執筆者：石橋幸男）［2009 年 1 月 受領］

1-1-1 数列と極限

(1) 収束・発散

番号 n を限りなく大きくしていくとき，a_n が限りなく α に近づくならば，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい，α を $\{a_n\}$ の極限値という．このことを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \qquad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

などと表す．これをもっと厳密に定義すれば，次のようになる．

任意の正数 ε に対して，

$$n > N \text{ ならば}, \qquad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるような自然数 N が存在する．

収束しない数列は発散するという．例えば，

$$\{1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots\}, \qquad \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

などは発散するという．特に，a_n が限りなく大きくなる場合，$\{a_n\}$ は無限大（∞）に発散するといい，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，　$a_n \to \infty$　$(n \to \infty)$ などと表す．また，a_n が限りなく小さくなる場合，$\{a_n\}$ は $-\infty$ に発散するという．

数列 $\{a_n\}$ が，$a_n \leq a_{n+1}$　$[a_n \geq a_{n+1}]$　$(n \in \boldsymbol{N})$ を満足するとき，$\{a_n\}$ を単調増加 (数) 列［単調減少 (数) 列］という．そして，これを単調数列と総称する．

定理 1. 有界な単調数列は収束する．

適用例　$a_n = (1 + 1/n)^n$　$(n \in \boldsymbol{N})$ は，簡単な計算によって，$a_n < a_{n+1}$，$a_n < 3$ が示されるので，$\{a_n\}$ は収束する．この極限値（$2.71828\cdots$）を自然対数の底といい，e で表す．

数列 $\{a_n\}$ からそのを一部を抜き出して，元の順序に並べた数列

$$\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_i}, \cdots\} \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < \cdots)$$

を数列 $\{a_n\}$ の部分列という．$\{a_n\}$ が有界であっても $\{a_n\}$ は収束するとは限らないが，その部分列に関しては次の定理がある．

定理 2. **（ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理）** 有界な数列は収束する部分列を有する．

例えば，$a_n = 1/n + (-1)^n$ を考えてみよう．明らかに，a_n は収束しないが，$-1 < a_n < 2$ であるから，$\{a_n\}$ は収束する部分列を有する．実際，$a_{2n-1} \to -1$ $(n \to \infty)$，$a_{2n} \to 1$ $(n \to \infty)$ となる．

定理 3. **（コーシーの収束条件）** 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (m, n > N)$$

が成立することである．

この条件を満たす数列をコーシー列，基本列などという．

(2) 上極限・下極限

ある定数 α にいくら近いところにも無限個の a_n が存在する場合，α を数列 $\{a_n\}$ の集積値という．$\{a_n\}$ が極限値をもてば，それはただ一つの集積値であるが，収束する部分列の極限値も上記の条件を満足するから，やはり集積値である．従って，$\{a_n\}$ が有界であれば，有限の集積値が少なくても一つ存在することになる．また，便宜上，$+\infty$，$-\infty$ も集積値に加える．このようにすると，どのような数列も少なくても一つの集積値をもつことになる．

数列 $\{a_n\}$ の最大［最小］の集積値を上極限［下極限］といい，$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ $[\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n]$ で表す．これらは，常に存在し，$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k | k \geq n\}$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k | k \geq n\}$ で与えられる．

1-1-2 関数と極限

(1) 関数

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 D の各元に実数値を対応させる規則があるとき，この規則を D を定義域とする関数という．D の元を x で表し，それに対応する値を y で表すとき，y は x の関数であるといい，$y = f(x)$, $y = g(x)$ などと表す．D の各元に対応する y の値の集合 $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ を値域という．

二つの関数 $y = f(x)$，$z = g(y)$ があり，$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているときには，$z = g(f(x))$ を定義することができる．これを f と g の合成関数といい，$z = g \circ f$ で表す．

定義域の各 x に対して，y がただ一つ決まる場合を 1 価関数という．これに対して y が二つ以上決まる場合を多価関数という．

関数 $f(x)$ が，ある区画 I 上の任意の x_1，x_2 に対して，

$$x_1 < x_2 \text{ならば,} \qquad f(x_1) \leq f(x_2) \qquad [f(x_1) \geq f(x_2)]$$

を満足するとき，$f(x)$ を I 上の単調増加［減少］関数という．特に，上式で等号の成立することがなければ，$f(x)$ を狭義単調増加［減少］関数という．

関数 $y = f(x)$ が，区間 I 上の任意の x_1, x_2 に対して，

$$x_1 \neq x_2 \text{ならば,} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

を満たすとき，$f(x)$ は 1 対 1 であるという．このとき，値域 $f(I)$ に属する各 y に対して $y = f(x)$ を満たす x（$\in I$）が定められるから，$f(I)$ を定義域，I を値域とする関数を考えることができる．これを，$x = f^{-1}(y)$ と表し，$f(x)$ の逆関数という．独立変数を x，従属変数を y で表すのが，慣習となっているから，これに従うと $y = f(x)$ の逆関数は $y = f^{-1}(x)$ となる．そして，これらは $y = x$ に対して対称となっている．

(2) 関数の極限

任意の正数 ε に対して，ある δ が存在して，

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (0 < |x - x_0| < \delta)$$

が成立するとき，A を $x \to x_0$ のときの極限（値）といい，$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, f(x) \to A$（$x \to x_0$）などと表す．ここで，注意しなければならないことは，$x = x_0$ を含んでいないことである．従って，$f(x_0)$ はどのように定義されていても $\lim_{x \to x_0} f(x)$ に影響しない．

任意の K に対して，ある δ が存在して，

$$f(x) > K \quad [f(x) < K] \quad (0 < |x - x_0| < \delta)$$

が成立する場合，$x \to x_0$ のとき，$f(x)$ は無限大 (∞)［負の無限大 $(-\infty)$］に発散するといい，$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad [-\infty], \quad f(x) \to \infty \quad [-\infty]$ （$x \to x_0$）などと表す．

x が，x_0 に大きい方から近づいても小さい方から近づいても，極限値が同じとは限らないし，x_0 が定義域の端点である場合もある．このような場合には，近づく方向を指定した極限が必要となる．大きい［小さい］方から x_0 に近づいたときの極限を，$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \quad [\lim_{x \to x_0-0} f(x)]$ と表し，これを右極限［左極限］という．

任意の正数 ε に対して，ある K が存在して，

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (x > K) \qquad [|f(x) - A| < \varepsilon \quad (x < K)]$$

が成り立つとき，$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad [\lim_{x \to -\infty} f(x)] = A$ と表す．

同様に，任意の L に対して，ある K が存在して，

$$f(x) > L \quad (x > K) \qquad [f(x) < L \quad (x > K)]$$

が成り立つとき，$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad [-\infty]$ と表す．$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ も全く同様に定義される．

1-1-3 連続関数

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ の近傍で定義されていて，$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ であるとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で連続であるという．これは，$f(x_0)$ が定義されていて $x \to x_0$ のときの右極限と左極限が共に $f(x_0)$ であることを示している．

$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \quad [\lim_{x \to x_0-0} f(x)] = f(x_0)$ ならば，$f(x)$ は x_0 で右連続［左連続］であるという．$f(x)$ が区間 I 上の各点で連続であるとき，$f(x)$ は I 上で連続であるという．ただし，I が左の端点 a［右の端点 b］を含む場所は，$x = a \quad [x = b]$ においては右［左］連続であるものとする．

定理 4. **（中間値の定理）** 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続であり，$f(a) < k < f(b)$ または $f(a) > k > f(b)$ であれば，$f(c) = k \quad (a < c < b)$ を満たす c が存在する．

定理 5. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続であれば，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で有界であり，この区間上で最大値と最小値をとる．

定理 6. **（一様連続性）** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で連続とする．このとき，任意の正数 ε

に対して，ある δ（x, x' に依存しない）が存在して，

$$|x - x'| < \delta, \quad x, \quad x' \in [a, b] \text{ ならば,} \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

が成立する．

■12 群 - 1 編 - 1 章

1-2 微分

（執筆者：石橋幸男）[2009 年 1 月 受領]

1-2-1 導関数

$x = a$ の近傍で定義された関数 $f(x)$ に対して，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1・1}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという．また，その値を $x = a$ における $f(x)$ の微分係数といい，$f'(a)$ で表す．当然のことであるが，h が正の方向から 0 に近づいても負の方向から 0 に近づいても，式 (1・1) が同じ値に収束しなければ，微分可能ではない．しかし，$f'(a)$ は存在しないが，

$$f'_+(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad f'_-(a) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1・2}$$

が存在する場合がある．$f_+(a)$, $f_-(a)$ をそれぞれ右（側）微分係数，左（側）微分係数といい，これらを片（側）微分係数と総称する．

$f(x)$ が区間 I 上の各点で微分可能であるとき，$f(x)$ は I 上で微分可能であるという．ただし，I が端点を含む場合は，その点においては片側微分係数が存在するものとする．$f'(a)$ に対応させて定義された関数 $f'(x)$（$df(x)/dx$）を $f(x)$ の導関数という．

定理 7. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるための必要十分条件は，

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h) \quad （A \text{ は } h \text{ を含まない}）$$

である．

定理 7 より，関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば，$f(x)$ は $x = a$ で連続であることが分かる．

（合成関数の微分） $y = f(x)$ が I 上で微分可能で，$g(y)$ が J 上で微分可能であり，$f(x)$ の値域が J に含まれるとき，$g(f(x))$ は I 上で微分可能であり，

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = g'(f(x))f'(x)$$

（逆関数の微分） $y = f(x)$ がある区間で狭義単調で微分可能であれば，その逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は，$f'(x) \neq 0$ となる点で y の関数として微分可能で，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)} \quad （f'(x) \neq 0）$$

（パラメータ表示された関数の微分） $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ は共に微分可能で $\varphi(t)$ は狭義単調とする．$\varphi'(t) \neq 0$ の点において，y は x の関数として微分可能であり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

1-2-2 平均値の定理

定理 8.（ロールの定理）関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．このとき，$f(a) = f(b)$ ならば，

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．**注意:** $x = a$, b での $f(x)$ の微分可能性は不要.

定理 9.（平均値の定理）関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する.

定理 10.（コーシーの平均値の定理）$f(x)$, $g(x)$ は $[a, b]$ 上で連続，(a, b) で微分可能とする．$g(a) \neq g(b)$ かつ (a, b) 上で $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 にならなければ，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する.

1-2-3 高次導関数

関数 $f(x)$ を n 回微分して得られる関数を，$f(x)$ の第 n 次導関数といい，$f^{(n)}(x)$, $d^n f(x)/dx^n$ などと表す．第 n 次導関数が連続であるとき，$f(x)$ は n 回連続微分可能であるという．そして，このような関数を C^n 級関数という．特に，何回でも微分可能な関数を無限回連続微分可能，あるいは C^∞ 級という.

定理 11.（ロピタルの定理）関数 $f(x)$, $g(x)$ は，共に $x = a$ では微分可能でなくてもよいが，それ以外の a の近傍では微分可能かつ $g'(x) \neq 0$ とする．$f(x)$, $g(x) \to 0$ （$x \to a$）のとき，$\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ （$\pm\infty$ でもよい）が存在すれば，$\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ も存在して，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

なお，$f(x)$, $g(x) \to \pm\infty$ （$x \to a$）あるいは $a = \pm\infty$ のときにも上の関係は成立する.

定理 12.（テイラーの定理）関数 $f(x)$ が，$[a, b]$ 上で連続な第 $n - 1$ 次導関数をもち，(a, b) 上で第 n 次導関数をもてば，ある c （$a < c < b$）が存在して，

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

ただし，$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$（ラグランジュの剰余項）または $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-c)^{n-1}(b-a)$（コーシーの剰余項）である．　**注意:** $n = 1$ のときは，平均値の定理と一致する．

関数 $f(x)$ が，$x = a$ を内部に含む区間 I において C^∞ 級であるとき，$R_n \to 0$ （$n \to \infty$）であれば，$f(x)$ は I において，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

のように表すことができる．これを $x = a$ におけるテイラー展開という．特に，$a = 0$ としたものをマクローリン展開という．

1-2-4 極値

関数 $f(x)$ が，c を含む開区間 $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$ で定義されていて，ε を十分小さい正数とするとき，

$$f(x) < f(c) \quad (x \neq c) \qquad [f(x) > f(c) \quad (x \neq c)]$$

であれば，$f(x)$ は $x = c$ で極大［極小］になるといい，$f(c)$ を極大値［極小値］という．そして，これらを極値と総称する．

定理 13. (i) 関数 $f(x)$ が，$x = c$ で極値をとり，その点において微分可能であれば，$f'(c) = 0$ である．
(ii) 関数 $f(x)$ は，$x = c$ で連続であり，$x = c$ では微分可能でなくてもよいが，その近傍で微分可能とする．このとき，十分小さな正数 ε に対して，

$$f'(x) > 0 \quad [f'(x) < 0] \quad (c-\varepsilon < x < c) \quad \text{かつ} \quad f'(x) < 0 \quad [f'(x) > 0] \quad (c < x < c+\varepsilon)$$

ならば，$f(x)$ は $x = c$ で極大［極小］となる．

■12 群 - 1 編 - 1 章

1-3 積分

（執筆者：石橋幸男）［2009 年 1 月 受領］

1-3-1 不定積分

(1) 不定積分

関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数あるいは不定積分といい，$F(x) = \int f(x)dx$ のように表す．$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすれば，任意の原始関数 $\int f(x)dx$ は，

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C：任意定数)$$

のように表すことができる．C を積分定数という．

注意: 原始関数と不定積分は，同義語のように扱われることが多いが，厳密には原始関数を求めることは微分の逆演算であり，不定積分は後述する定積分の積分区間の上端を変数としたものであるから，両者は元来異なる概念のものである．

表 1･1 に，主な積分公式を示す．ただし，積分定数は省略し，x 以外は定数とする．

表 1･1　主な積分公式

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \log|x| \qquad \int e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \qquad \int \cos x dx = \sin x \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0) \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log|x + \sqrt{x^2 + A}| \quad (A \neq 0) \qquad \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{x^2 + A}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + A} + A\log|x + \sqrt{x^2 + A}|\right) \quad (A \neq 0)$$

[置換積分法]　$\varphi(t)$ を C^1 級関数とすれば，

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (x = \varphi(t))$$

[部分積分法]　$f(x)$，$g(x)$ が共に C^1 級関数ならば，

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dt$$

有理関数は，部分分数に分解することで，常にその不定積分を求めることができる．

　　

（2）三角関数を含む関数の不定積分

$R(X),\ R(X,\ Y)$ は，それぞれ X と Y の有理関数とする．

A. $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(t)dt$ （$\sin x = t$）

$\displaystyle\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(t)dt$ （$\cos x = t$）

B. $\displaystyle\int R(\cos x,\ \sin x)dx = \int R(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$ （$\tan\dfrac{x}{2} = t$）

C. $R(\cos x,\ \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$ の場合, $\tan x = t$ とおくことによって, $\int R(\cos x,\ \sin x)dx$ は有理関数の積分に帰着する．

（3）無限関数の積分

一般には，無理関数の不定積分は初等関数では表せないが，被積分関数が特別な形をしている場合には，有理関数の積分に帰着させることができる．$R(X,\ Y)$ を $X,\ Y$ の有理関数とする．

A. $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ （$ad-bc \neq 0,\ n = 2, 3, \cdots$）の場合，$\sqrt[n]{(ax+b)/(cs+d)} = t$ とおけば，有理関数の積分に帰着する．

B. $\displaystyle\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ の場合

(i) $a > 0$ のとき　$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおけば，有理関数の積分に帰着する．

(ii) $a < 0$ のとき　$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{-a}(\beta-x)\sqrt{(x-\alpha)/(\beta-x)}$ （$\alpha < \beta$）のように変形できるから $\sqrt{(x-\alpha)/(\beta-x)} = t$ とおけばよい．

1-3-2 定積分

（1）定積分の定義

$f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ で定義された有界な関数とする．I 上に分点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$（$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$）をとる．この分割 Δ に対して，

$$I_k = [x_{k-1},\ x_k],\quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}\quad (k = 1, 2, 3, \cdots, n),\quad |\Delta| = \max_k \Delta x_k$$

とする．I_k 上に任意の点 ξ_k をとり，

$$R[f, \Delta,\ \{\xi_k\}] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

とする．これをリーマン和という．$|\Delta| \to 0$ とするとき, 分割 $\Delta, \{\xi_k\}$ に関係なく, $R[f, \Delta,\ \{\xi_k\}]$ が J に収束するならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であるという．また，J を $f(x)$ の $[a, b]$ における定積分といい，この値 J を $\int_a^b f(x)dx$ のように表す．

(2) 積分可能条件

I_k 上の $f(x)$ の上限，下限を，それぞれ M_k，m_k で表し，

$$S_\Delta = \sum M_k \Delta x_k, \quad s_\Delta = \sum m_k \Delta x_k$$

を定義する．当然，$S_\Delta \geq R[f, \Delta, \{\xi_k\}] \geq s_\Delta$ が成立している．さらに，上積分 S，下積分 s を，$S = \inf_\Delta S_\Delta$，$s = \sup_\Delta s_\Delta$ のように定義する．$S = s$ が積分可能条件である．

ここで，有界関数であるが，積分可能でない簡単な例をあげておく．$[0, 1]$ で，$f(x) = 1$（x : 有理関数),0（x : 無理関数）のように定義された関数の $[0,\ 1]$ の積分を考えてみよう．明らかに，任意の分割に対して $M_k = 1$，$m_k = 0$ となるから，$S = 1$，$s = 0$ となり，積分可能でないことが分かる．

定理 14. 関数 $f(x)$ が $[a, b]$ 上で連続であれば，$f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能である．

定理 15. **（微分積分学の基本定理）** 関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続とする．このとき，$f(x)$ の不定積分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は $[a, b]$ で微分可能であって，$F'(x) = f(x)$ である．すなわち，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の一つである．従って，$f(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすれば，

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

(3) 広義積分

有界でない関数の定積分や積分区間が有界でない積分を広義積分という．$f(x)$ が，(a, b) で連続であり，積分区間の端点 a または b あるいは双方で有界でない場合には，それぞれ広義積分を，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)dx$$

で定義する．これらが収束するとき，通常の積分と同様，$\int_a^b f(x)dx$ と表す．

同様に $(-\infty, b]$，$[a, \infty)$，$(-\infty, \infty)$ で連続な関数に対して，それぞれ次のように定義する．

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a \to -\infty, b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

定理 16. **（広義積分の収束条件）** $f(x)$ が $[a, b)$（$b = \infty$ を含む）で連続であるとき，$\int_a^b f(x)dx$ が収束するための条件は，

$$\int_a^{x_2} f(x)dx - \int_a^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \to 0 \quad (x_1, x_2 \to b - 0)$$

$\int_a^b |f(x)|dx$ が収束すれば，広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束する．このとき，$\int_a^b f(x)dx$ は絶対収束するという．

■12 群 - 1 編 - 1 章

1-4 偏微分

（執筆者：石橋幸男）［2009 年 1 月 受領］

1-4-1 偏微分

(1) 2 変数関数の極限と連続性

$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 D の各点に対して，値を定める規則があるとき，これを D 上の 2 変数関数といい，D 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対応する値 z を，

$$z = f(\mathrm{P}), \quad z = f(x, y)$$

などと表す．このとき，D を定義域，x，y を独立変数，z を従属変数という．

点 $\mathrm{P}(x, y)$ が，点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ に一致することなく任意の方向から P_0 に近づいていくとき，$f(x, y)$ がある一定値 c に限りなく近づくならば，$\mathrm{P} \to \mathrm{P}_0$ のとき，$f(x, y)$ は極限値 c に収束するという．これを

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = c, \quad \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0} f(\mathrm{P}) = c, \quad f(x, y) \to c \quad ((x, y) \to (a, b))$$

などと表す．$f(a, b)$ がどのように定義されていても，なんら $\displaystyle\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0} f(\mathrm{P})$ に影響しない．

1 変数の場合と同様，$f(a, b)$ が定義されていて，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成立するとき，関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) で連続であるという．

また，有界閉集合 D 上で連続な関数 $f(x, y)$ は D 上で最大値と最小値をとる．

1-4-2 偏導関数

(1) 偏導関数

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h,\ b) - f(a, b)}{h} \tag{1・3}$$

が存在するとき，$f(x, y)$ は点 (a, b) で x に関して偏微分可能であるという．そして，式 (1･3) を点 (a, b) における偏微分係数といい，これを，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad f_x(a, b) \tag{1・4}$$

などと表す．$f(x, y)$ が D 上の各点で x に関して偏微分可能であるとき，$f_x(x, y)$ は D 上の関数となる．これを，$f(x, y)$ の x に関する偏導関数という．同様にして，y に関する偏微分係数 $f_y(a, b)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$，偏導関数 $f_y(x, y)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ が定義される．

$f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ が x，y に関して偏微分可能であるとき，$f_{xx}(x, y)$，$f_{xy}(x, y)$，$f_{yx}(x, y)$，$f_{yy}(x, y)$ を考えることができる．これらを，第 2 次偏導関数という．全く同様に，第 3，4，

$\cdots$ 次偏導関数を考えることができる．$f(x,y)$ の第 n 次偏導関数がすべて連続であるとき，$f(x,y)$ は C^n 級（関数）であるという．また，任意の n に対して $f(x,y)$ が C^n 級であるとき，$f(x,y)$ は C^∞ 級であるという．

f_{xy}，f_{yx} が存在して，これらが共に連続ならば，$f_{xy} = f_{yx}$ である．同様に，第 3 次以上の偏導関数についても，それらがすべて連続であれば，偏微分の順序を変更できる．例えば，$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$.

（2）全微分

関数 $f(x,y)$ は，点 (a,b) 近傍で定義され，偏微分可能とする．

$$\Delta f = f(a+h,\ b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \tag{1・5}$$

が成立するとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能あるいは微分可能であるという．そして，$f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるとき，

$$df = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

を $f(x,y)$ の点 (a,b) における全微分という．点 (a,b) 近傍で f_x，f_y が存在して，そのどちらかが点 (a,b) で連続であれば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能である．従って，C^1 級関数は全微分可能である．

［合成関数の微分］　関数 $f(x,y)$ が全微分可能であって，$x = x(t)$，$y = y(t)$ が微分可能であれば，$f(x,y)$ は t の関数として微分可能であって，

$$\frac{df}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt}$$

定理 17.（テイラーの定理）$f(x,y)$ は領域 D 上の C^n 級関数であり，
線分 $\{(a+ht,\ b+kt)\ |\ (a \le t \le b)\}$ は D に含まれるとする．このとき，

$$f(a+h,\ b+k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^k f(a,b) + \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f(a+\theta h,\ b+\theta k)$$

$$(0 < \theta < 1)$$

なお，$n = 1$ のときを *2* 変数関数の平均値の定理という．

1-4-3 陰関数

二つの変数 x と y の間に，関係式 $F(x,y) = 0$ が成り立っているとする．この方程式を y について解くことによって，y は $y = f(x)$ という形の x の関数となる．$y = f(x)$ を，$F(x,y) = 0$ が定める陰関数という．一般には，$f(x)$ は多価関数となるが，微分可能な 1 価関数の存在を保証するのが次の定理である．

定理 18.（陰関数定理）$F(x,y)$ は，点 (a,b) 近傍で定義された C^1 級関数とする．このとき，$F(a,b) = 0$，$F_y(a,b) \neq 0$ ならば，$x = a$ の近傍で，

$$b = f(a), \qquad F(x,\ f(x)) = 0$$

を満たす C^1 級関数 $y = f(x)$ がただ一つ存在し，その導関数 $f'(x)$ は，$f'(x) = -f_x(x,y)/f_y(x,y)$ によって与えられる．

1-4-4 2 変数関数の極値

D 上で定義された 2 変数関数 $f(\mathrm{P})$ が，D の内点 P_0 を含む領域 $u_\varepsilon(\mathrm{P}_0)$（$\subset D$）上の P_0 以外の任意の点 P に対して，

$$f(\mathrm{P}_0) > f(\mathrm{P}) \quad [f(\mathrm{P}_0) < f(\mathrm{P})]$$

となるような $u_\varepsilon(\mathrm{P}_0)$ が存在するとき，$f(\mathrm{P})$ は点 P_0 で極大［極小］になるといい，$f(\mathrm{P}_0)$ を極大値［極小値］という．極大値と極小値を極値と総称する．そして，点 P_0 を極値点という．

偏微分可能な関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとれば，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ である．

定理 19. 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) 近傍で C^2 級であり，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする．また，$\Delta(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$ とおく．

(i) $\Delta(a,b) > 0$ の場合，$f_{xx}(a,b) > 0 \quad [< 0]$ ならば，$f(a,b)$ は極小値［極大値］である．

(ii) $\Delta(a,b) < 0$ の場合，$f(a,b)$ は極値ではない．

定理 20. **（ラグランジュの乗数法）** $f(x,y)$, $g(x,y)$ は共に C^1 級関数とする．このとき，条件 $g(x,y) = 0$ の下で，$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとり，点 (a,b) が $g(x,y)$ の特異点でない $(g_x(a,b)^2 + g_y(a,b)^2 \neq 0)$ ならば，

$$f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0, \qquad f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0$$

を満足する定数 λ が存在する．

■12 群 - 1 編 - 1 章

1-5 重積分

（執筆者：石橋幸男）［2009 年 1 月 受領］

1-5-1 重積分の定義

まず，2 重積分について述べる．2 変数関数 $f(x,y)$ を有界閉集合 D 上で定義された有界な関数とする．D を含む長方形閉領域 $K = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ を選び，$f(x,y) = 0$（$(x,y) \in K - D$）のように定義して，定義域を K にまで広げておく．区間 $[a,b], [c,\ d]$ を，それぞれ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b,\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$ のように，m,n 個の小区間に分割して分割 $\Delta = \{k_{ij}\}, k_{ij} = \{(x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}, 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ が定義される．また，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$，$|\Delta| = \max\{\Delta x_i, \Delta y_j\}$ とおく．

K_{ij} 上の点 (ξ_i, η_j) を任意に選び，$\Delta, \{(\xi_i, \eta_j)\}$ に関する $f(x,y)$ のリーマン和を次のように定義する．

$$R[f, \Delta,\ \{(\xi_i, \eta_j)\}] = \sum f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

1 変数の積分と全く同様，$|\Delta| \to 0$ とするとき，$\Delta, (\xi_i, \eta_j)$ の選び方に関係なく，リーマン和がある一定値 J に収束するとき，$f(x,y)$ は D 上で積分可能であるといい，この値 J を $\iint_D f(x,y)dxdy$ と表す．

全く同様に，D 上で定義された 3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対して，リーマン和 $\sum f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ が，分割の幅を限りなく小さくするとき，分割の仕方，点 (ξ_i, η_j, ζ_k) の選び方に関係なく，ある一定値に収束するならば，その極限値を $f(x,y,z)$ の D 上での 3 重積分といい，$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ と表す．

1 変数の場合と同様，K_{ij} 上の $f(x,y)$ の上限，下限をそれぞれ M_{ij}，m_{ij} で表すと，上積分 S，下積分 s は次のように定義される．

$$S = \inf_{\Delta} \sum M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j, \qquad s = \sup_{\Delta} \sum m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$$

$S = s$ が積分可能条件となる．

1-5-2 累次積分

長方形閉領域 $K = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ 上で連続な関数 $f(x,y)$ は K 上で積分可能であり，

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

によって求めることができる．このような，1 変数の積分を 2 回以上繰り返す計算手法を累次積分という．

注意: $f(x,y)$ が連続でなければ，$\iint_K f(x,y)dxdy$ が存在しても累次積分が存在するとは限らない．

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ を $[a,b]$ 上で連続な関数とするとき，閉領域 $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ 上で連続な関数 $f(x,y)$ は D 上で積分可能であり，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$$

1-5-3 変数変換

uv 平面の閉領域 E が，C^1 級関数 $x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$ によって xy 平面の閉領域 D に 1 対 1 に写されるとき，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)|J(u,v)|dudv$$

となる．ただし，$J(u,v)$ はヤコビアンと呼ばれ，

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}$$

によって与えられる．特に，極座標 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の場合には，$J(r,\theta) = r$ となるから，形式的に $dxdy = rdrd\theta$ となる．

全く同様にして，uvw 空間の閉領域 E が，C^1 級関数 $x = x(u,v,w)$，$y = y(u,v,w)$，$z = z(u,v,w)$ によって xyz 空間の閉領域 D に 1 対 1 に写されるとき，

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_E f(x,y,z)|J(u,v,w)|dudvdw \\ J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} &= \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる．特に，空間の極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi$，$y = r\sin\theta\sin\varphi$，$z = r\cos\theta$ の場合には，$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ となる．

1-5-4 広義積分

有界でない関数の重積分や積分範囲が有界でない重積分を広義重積分という．広義重積分も 1 変数の広義積分と同様，徐々に積分範囲を広げたときのその極限値によって定義される．

いま，D 上での $f(x,y)$ の重積分を考えるものとする．$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots \subset D$ かつ D 内の任意の有界集合はある D_n に含まれるような任意の D の増加列 $\{D_n\}$ に対して，有限な極限値 $J = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$ が存在し，かつ J の値が $\{D_n\}$ によらないとき，$f(x,y)$ は D 上で広義積分可能であるという．そして，この値 J を $\iint_D f(x,y)dxdy$ と表す．

$f(x,y)$ が符号を変えなければ，D に収束するある一つの増加列 $\{D_n\}$ に対して広義積分が収束すれば，$f(x,y)$ は D 上で積分可能となる．従って，計算に都合のいい $\{D_n\}$ に対する積分の極限値を求めればよい．

一方，$f(x,y)$ が D 上で符号を変える場合には，$f(x,y)$ が D 上で広義積分可能となる必要十分条件は，$f(x,y)$ が D 上で絶対積分可能となることである．

注意: 例えば，$\int_0^1\int_0^\infty(\sin x/x)dxdy = \pi/2$ であるが，$\int_0^1\int_0^\infty |\sin x/x|dxdy = \infty$ であるから，$\iint_D(\sin x/x)dxdy$，$D = \{(x,y)|x \geq 0,\ 1 \geq y \geq 0\}$ は収束しない．

■12 群 - 1 編 - 1 章

1-6 微分方程式

（執筆者：石橋幸男）[2009 年 1 月 受領]

x を独立変数とする関数 $y = f(x)$ とその導関数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 及び x を含んだ関係式 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ を（常）微分方程式といい，F に含まれる導関数の最高次のものが $y^{(n)}$ であるとき，n 階微分方程式という．

一般に，n 階微分方程式の解は n 個の任意定数をもち得るが，このような解を一般解という．これに対して，任意定数の一部またはすべてに値を代入した解を特殊解という．また，一般解の任意定数をどのように設定しても表すことのできない解が存在することがある．このような解を特異解という．

1-6-1 1 階微分方程式

（1）変数分離形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

のように，dy/dx が x の関数と y の関数の積になっている微分方程式を変数分離形という．$g(y) \neq 0$ の場合には，$1/g(y) \cdot dy/dx = f(x)$ と変形することによって，

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \qquad (C : \text{任意定数})$$

に帰着する．また，$g(y) = 0$ を満足する y（定数）があれば，これも解となる．

（2）同次形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$$

のように，dy/dx が y/x の関数である場合を同次形という．この場合は，$u = y/x$ とおけば，変数分離形微分方程式 $xdu/dx = f(u) - u$ に帰着する．

（3）1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

のような微分方程式を 1 階線形微分方程式という．$e^{\int P(x)dx}$ を微分方程式の両辺に掛け，両辺を x で積分することによって，直ちに次の解を得る．

$$y = e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C) \qquad (C : \text{任意定数})$$

（4）完全微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1・6}$$

において，左辺がある関数 $F(x, y)$ の全微分に等しければ，$dF = 0$ であるから，これを積分し

て $F(x,y)=C$（C : 任意定数）を得る．このような微分方程式を完全微分形という．式 (1･6) が完全微分方程式であるための必要十分条件は，$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$ によって与えられる．このとき，一般解は次のようになる．

$$\int P dx+\int (Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P dx)dy=C \qquad (C : \text{任意定数})$$

式 (1･6) が完全微分形でなくても，適当な関数 $M(x,y)$ を式 (1･6) に乗じることによって完全微分形に帰着することがある．このような $M(x,y)$ を積分因子という．

1-6-2 定数係数線形微分方程式

微分演算子 $D=d/dx$ を用いて，

$$(D^n+p_{n-1}D^{n-1}+\cdots+p_0)y=Q(x) \qquad (p_0,p_1,\cdots,p_{n-1} : \text{定数}) \tag{1･7}$$

のように表される微分方程式を n 階定数係数線形微分方程式という．$Q(x)=0$ とした

$$(D^n+p_{n-1}D^{n-1}+\cdots+p_0)y=0 \tag{1･8}$$

を斉次（同次）の微分方程式という．これに対して，式 (1･7) を非斉次（非同次）の微分方程式という．

定理 21. 式 (1･7) の解の一つを $y_p(x)$，式 (1･8) の一般解を $y_c(x)$ とする．このとき，
(i) 式 (1･7) の一般解 $y(x)$ は $y(x)=y_c(x)+y_p(x)$ によって与えられる．
(ii) 特性方程式 $F(\lambda)=\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+p_0=0$ の k 個の相異なる解（特性根）を，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ とし，その重複度をそれぞれ $m_1,m_2,\cdots,m_k$（$\sum m_i=n$）とすれば，$y_c(x)$ は，

$$y_c(x)=c_{m_1}(x)e^{\lambda_1 x}+C_{m_2}(x)e^{\lambda_2 x}+\cdots+c_{m_k}(x)e^{\lambda_k x}$$

で与えられる．ただし，$C_{m_i}(x)$（$i=1,2,\cdots,k$）は任意の m_i-1 次多項式である．

特性方程式が，$\lambda=\alpha\pm j\beta(\beta\neq 0)$ を解としてもつときには，これに対応する解は，特性根の重複度を m として，

$$e^{\alpha x}\{(a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1})\cos\beta x+(b_0+b_1x+\cdots+b_{m-1}x^{m-1})\sin\beta x\}$$

のように表すこともできる．

■12 群 - 1 編 - 1 章

1-7 級数

（執筆者：石橋幸男）［2009 年 1 月 受領］

1-7-1 級数

(1) 基本性質

無限数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき，$\{a_n\}$ の各項を順に加えた

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1・9}$$

を，（無限）級数という．なお，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を単に $\sum a_n$ と表すこともある．数列 $\{a_k\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を，第 n 部分和という．これを S_n で表すと，新たに数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が生成される．$\{S_n\}$ が S に収束するとき，級数（式 (1・9)）は S に収束するという．また，$\{S_n\}$ が収束しないとき，級数（式 (1・9)）は発散するという．

定理 22. 級数 $\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対してある自然数 N が存在して，次の関係が成立することである．

$$n > m > N \text{ ならば，} \quad |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

系　$\sum a_n$ が収束すれば，$a_n \to 0$（$n \to \infty$）

注意: この逆は成立しない．例えば，$a_n = 1/n$ の場合 $a_n \to 0$（$n \to \infty$）であるが，$\sum a_n$ は無限大に発散する．

(2) 正項級数

級数 $\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ において，$a_n \geq 0$（$n = 1, 2, \cdots$）であるとき，$\sum a_n$ を正項級数という．

定理 23. 正項級数 $\sum a_n$ が収束するための必要十分条件は，その第 n 部分和列 $\{S_n\}$ が有界となることである．

定理 24.（比較判定法） 二つの正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ において，ある定数 K が存在して，$a_n \leq Kb_n$（$n = 1, 2, \cdots$）であるとき，

(i)　$\sum b_n$ が収束すれば，$\sum a_n$ も収束する．

(ii)　$\sum a_n$ が発散すれば，$\sum b_n$ を発散する．

定理 25.（コーシー・アダマールの判定法） 正項級数 $\sum a_n$ において，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = r$（必ず存在する）であるとき，

(i)　$1 > r \geq 0$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．

(ii)　$r > 1$ ならば，$\sum a_n$ は発散する．

定理 26.（ダランベールの判定法） 正項級数 $\sum a_n$ において，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = r$ であるとき，

(i)　$1 > r \geq 0$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．

(ii)　$r > 1$ ならば，$\sum a_n$ は発散する．

定理 27.（積分判定法） $f(x)$（> 0）は，$[1, \infty)$ 上で連続な広義減少関数とする．このとき，

級数 $\sum f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$ が収束するための必要十分条件は，$\int_1^\infty f(x)dx$ が収束することである．

(3) 絶対収束級数

$\sum |a_n|$ が収束するとき，$\sum a_n$ は絶対収束するといい，$\sum a_n$ を絶対収束級数という．これに対して，$\sum |a_n|$ は発散するが，$\sum a_n$ が収束するとき，$\sum a_n$ は条件収束するといい，$\sum a_n$ を条件収束級数という．

定理 28. 絶対収束級数 $\sum a_n$ の項の順序を入れ替えて得られる級数 $\sum b_n$ も絶対収束して，$\sum a_n = \sum b_n$ が成立する．

注意: 条件収束級数では，無限個の項を入れ換えると，和が変わることがある．例えば，$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots = \log 2$ であるが，$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + \cdots = \frac{3}{2}\log 2$

(4) 交代級数

正負の項が交互に現れる級数を交代級数といい，次の性質を有する．

定理 29. **（ライプニッツの定理）** $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots > 0$ かつ $a_n \to 0$（$n \to \infty$）であれば，交代級数 $\sum(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$ は収束する．

1-7-2 関数列と関数項級数

数列 $\{a_n\}$ の a_n を関数 $f_n(x)$ で置き換えた列 $\{f_n(x)\}$ を関数列という．また，関数列 $\{f_n(x)\}$ から作られた級数 $\sum f_n(x)$ を関数項級数という．これらの収束発散は $x = x_0$ とすれば，$\{f_n(x)\}$，$\sum f_n(x)$ はそれぞれ単なる数列，級数となるから，数列，級数の収束発散と全く同様に扱うことができ，$x = x_0$ で収束（発散）するという．I 上の各 x に対して，$f_n(x) \to f(x)$（$n \to \infty$），$\sum_{k=1}^n f_k(x) \to F(x)$（$n \to \infty$）となるとき，$\{f_n(x)\}, \sum f_n(x)$ は，I 上でそれぞれ $f(x)$，$F(x)$ に各点収束（あるいは収束）するという．

I 上の連続関数 $f_n(x)$ よりなる関数列 $\{f_n(x)\}$ について，任意の正数 ε に対して，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$（$n > N$）となるような，$x$ に関係しない自然数 $N = N(\varepsilon)$ が存在するとき，$\{f_n(x)\}$ は I 上で $f(x)$ に一様収束するという．

各関数 $f_n(x)$ が I 上で連続であるとき，$\{f_n(x)\}$ が I 上で $f(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ は I 上の連続関数となる．

a_0，a_1，a_2，$\cdots$ を定数とした級数

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1・10}$$

をベキ級数または整級数という．ある定数 $R(>0)$ が存在して，式 (1・10) が，$|x| < R$ に対して収束し，$|x| > R$ に対して発散するとき，R をべき級数の収束半径という．すべての x に対して級数が収束するとき，$R = \infty$ と表し，収束半径は ∞ であるという．これに対して，$x = 0$ 以外のすべての x に対して級数が発散するとき，$R = 0$ と表し，収束半径は 0 であるという．

$\sum a_n x^n$ に，コーシー・アダマールの判定法，ダランベールの判定法を適用することによって，収束半径を与える次の公式が得られる．

(i) $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ とすれば，$R = 1/r$
(ii) $r = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$（$0 \leq r \leq \infty$）が存在すれば，$R = 1/r$
べき級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径を $R(> 0)$ とすれば，$(-R,\ R)$ 上の任意の x に対して，

項別積分: $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt$

項別微分: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

が成り立ち，収束半径は不変である．