■12 群（電子情報通信基礎）－ 1 編（解析学・代数学）

4 章 ベクトル解析

（執筆者：高橋大輔）[2009 年 9 月 受領]

■概要■

ベクトル解析は，多次元空間内のベクトルで表される量についての微積分学である．空間・平面における曲線や曲面は多次元空間で定義される対象であり，位置ベクトルや接線ベクトルなどの量を用いて記述する．それら幾何的対象の面積や体積は座標やパラメータに関する重積分によって計算でき，種々の積分公式が存在する．また，ベクトルが座標に依存するベクトル場については，勾配・発散・回転など重要な基礎概念が定義され，ガウスの発散定理やストークスの定理など積分に関する有用な定理が与えられている．

一方，ベクトル解析は理工学における数学モデルを表現する言語としての役割も大きい．例えば力学における力，電磁気学における電界・磁界などベクトルで表される量は非常に多い．これらベクトルは一般に時間や空間の座標によって値が変化し，ベクトル場を構成している．また，それらベクトルの座標に関する微分値や積分値は力学における運動方程式や電磁気学におけるマクスウェル方程式など，場の量に関する基礎方程式を与えるための基本的諸量を与えている．そして基礎方程式を解析する際には上述の積分定理が役に立つ．

以上のように，ベクトル解析は多次元の微積分学として数学における重要な基礎分野を提供し，同時に理工学における数学モデルについて記述言語としての役割およびモデルがもたらす種々の結果の数学的根拠を提供している．専門分野に進むまでの基礎段階としてベクトル解析を学ぶことはたいへん重要である．

【本章の構成】

ベクトル場と演算（4-1 節，ベクトル，内積，外積，スカラー三重積，ベクトル三重積），微分演算（4-2 節，勾配，発散，回転，ラプラシアン，種々の公式），座標系（4-3 節，極座標，円柱座標），曲線（4-4 節，接線ベクトル，法線ベクトル，曲率，フレネ–セレーの公式），曲面（4-5 節，基本形式，法曲率，平均曲率，全曲率），積分（4-6 節，線積分，面積分，空間領域の積分，ヤコビアン），積分定理（4-7 節，グリーンの定理，ガウスの発散定理，ストークスの定理），微分形式（4-8 節，微分形式，外積，外微分，ストークスの定理），テンソル（4-9 節，テンソル，対称テンソル，高階テンソル），物理との関連（4-10 節，モーメント，質量保存則，循環，静電場，慣性テンソル）

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-1 ベクトル場と演算

（執筆者：高橋大輔）[2009 年 9 月 受領]

3 次元ユークリッド空間を考え，右手系の座標軸 x, y, z 軸を与える．空間内の**ベクトル**を数ベクトル $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ で表すとする．$\boldsymbol{v}$ の長さ（大きさ）$|\boldsymbol{v}|$ は $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ で与えられる．また，x, y, z 軸正方向の長さ 1 のベクトル（**基本ベクトル**）をそれぞれ $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ とする．このときベクトル $\boldsymbol{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ の**内積** $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$ 及び**外積** $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ はそれぞれ次式で定義される．

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = |\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2| \cos\theta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2,\ c_1 a_2 - a_1 c_2,\ a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

θ は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ がなす角（$0 \leq \theta \leq \pi$）である．$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ がともに零ベクトル $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$ でなければ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の両方に垂直であり，$|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の張る平行四辺形の面積，すなわち $|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2| \sin\theta$ に等しく，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ がこの順で右手系をなす．

三つのベクトル $\boldsymbol{v}_i = (a_i, b_i, c_i)$（$i = 1, 2, 3$）に対して**スカラー三重積** $[\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2\, \boldsymbol{v}_3]$ は次式で定義され，$\boldsymbol{v}_1 \sim \boldsymbol{v}_3$ のはる平行六面体の符号付き体積（その絶対値は体積そのもの）に等しい．

$$[\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2\, \boldsymbol{v}_3] = \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

また，**ベクトル三重積**は $\boldsymbol{v}_1 \times (\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3)$ で定義され，以下の公式がある．

$$\boldsymbol{v_1} \times (\boldsymbol{v_2} \times \boldsymbol{v_3}) = (\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_3})\, \boldsymbol{v_2} - (\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2})\, \boldsymbol{v_3}$$

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-2 微分演算

（執筆者：高橋大輔）[2009 年 9 月 受領]

微分演算子 ∇（nabla, **ナブラ**）は $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ で定義される．このとき関数 $f(x, y, z)$ 及びベクトル値関数 $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ に対して，**勾配・発散・回転・ラプラシアン**は以下のように定義される．

名称	記号	定義
勾配	∇f, $\mathrm{grad}\, f$	$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$
発散	$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}$	$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$
回転	$\nabla \times \boldsymbol{v}$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$	$(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y})$
ラプラシアン	$\nabla^2 f$, $\nabla \cdot (\nabla f)$, Δf	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

それぞれの演算は以下のように意味づけされる．

勾配 点 (x, y, z) から単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 方向への $f(x, y, z)$ の変化率（**方向微分係数**）は $\boldsymbol{n} \cdot \nabla f = n_x \dfrac{\partial f}{\partial x} + n_y \dfrac{\partial f}{\partial y} + n_z \dfrac{\partial f}{\partial z}$ に等しい．

発散 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ を流れの速度ベクトルとするとき，点 (x, y, z) における単位体積かつ単位時間あたりの湧き出し量は $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ に等しい．

回転 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ を流れの速度ベクトルとするとき，$\nabla \times \boldsymbol{v}$ は点 (x, y, z) における渦度を与え，流体はその点において $\dfrac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{v}$ の角速度で自転している．

ラプラシアン $f(x, y, z)$ を温度場，k を熱伝導率とするとき，$-k\nabla^2 f$ は点 (x, y, z) における単位体積かつ単位時間あたりの発熱量を表す．

以上の微分演算について以下の種々の公式が与えられている．

$$
\begin{aligned}
&\nabla(fg) = (\nabla f)\, g + (\nabla g)\, f, \qquad \nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \cdot \boldsymbol{A} + f\,(\nabla \cdot \boldsymbol{A}),\\
&\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \times \boldsymbol{A} + f\,(\nabla \times \boldsymbol{A}),\\
&\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}),\\
&\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}),\\
&\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{A}),\\
&\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0}, \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0, \qquad \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-3 座標系

（執筆者：高橋大輔）[2009 年 9 月 受領]

ベクトル解析で重要となる曲線座標系の定義と関連する微分演算を示す．$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ などはその添字が表す曲線座標の正方向の単位ベクトルである．

（平面）極座標 (r, θ)　　$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta, \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2},$$

$$\boldsymbol{A} = R\,\boldsymbol{e}_r + \Theta\,\boldsymbol{e}_\theta \text{ とすると } \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rR)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}$$

（空間）極座標，球座標 (r, θ, φ)　　$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2},$$

$$\boldsymbol{A} = R\,\boldsymbol{e}_r + \Theta\,\boldsymbol{e}_\theta + \Phi\,\boldsymbol{e}_\varphi \text{ とすると } \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2R)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\Theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$

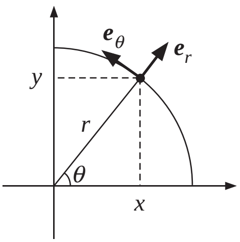
$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\Phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\Phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

円柱座標 (r, θ, z)　　$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$

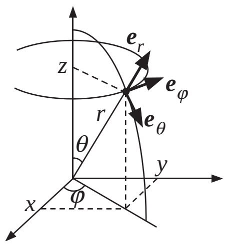
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z, \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\boldsymbol{A} = R\,\boldsymbol{e}_r + \Theta\,\boldsymbol{e}_\theta + Z\,\boldsymbol{e}_z \text{ とすると } \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rR)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

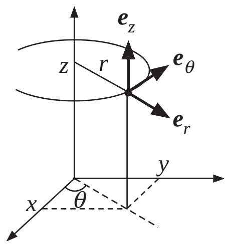
$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial\theta} - \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_z$$



平面極座標



空間極座標



円柱座標

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-4 曲線

（執筆者：高橋大輔）[2009 年 9 月 受領]

空間内の曲線 C 上の点の位置ベクトルが**パラメータ**（**媒介変数**）t によって，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で表されているとする．$\boldsymbol{r}(a)$ で表される点を始点としたとき，$\boldsymbol{r}(t)$ で表される点までの曲線の**長さ** $s(t)$ は次式で与えられる．

$$s(t) = \int_a^t |r'(\tau)| d\tau = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2}\, d\tau$$

曲線のパラメータを長さ s 自身にとることもでき，以下では曲線上の点の位置ベクトルを s を用いて $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と表す．長さ s の点における**接線ベクトル**は $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{r}'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ であり，単位ベクトルとなる．更に $\boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ をそれぞれ次式で定義する．

$$\boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s), \qquad \boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

ただし，$\kappa(s)$ は $|\boldsymbol{t}'(s)|$ に等しく**曲率**といい，その逆数を**曲率半径**という．$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ曲線の**主法線ベクトル**，**従法線ベクトル**といい，定義から $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ は互いに直交する単位ベクトルとなる．これらについて以下の**フレネ–セレーの公式**が成り立つ．$\tau(s)$ を**捩率**（れいりつ）と呼ぶ．

$$\boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s), \qquad \boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s), \qquad \boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{b}(s)$$

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-5 曲面

（執筆者：高橋大輔）［2009 年 9 月 受領］

曲面上の点の位置ベクトルをパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表示する．$d\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}du + \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}dv$ であり，

$$E = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

とすると

$$d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2$$

となる．これを曲面の**第一基本形式**と呼ぶ．更に曲面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \Big/ \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|$ であり，

$$L = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2} \cdot \boldsymbol{n}, \quad M = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u \partial v} \cdot \boldsymbol{n}, \quad N = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^2} \cdot \boldsymbol{n}$$

としたとき

$$-d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{n} = L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2$$

を**第二基本形式**と呼ぶ．L, M, N はそれぞれ次式で与えられる．

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

曲面 S 上の任意の点 P において，そこでの法線を含む任意の平面による S の切り口を考える．この切り口の曲線の P における曲率を**法曲率**という．点 P におけるすべての切り口に対する法曲率の最大値，最小値を**主曲率**と呼び，κ_1, κ_2 と表すとする．このとき**平均曲率** $H = \dfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$，**全曲率**（**ガウス曲率**）$K = \kappa_1\kappa_2$ は次式で与えられる．

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

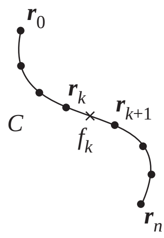
■12 群 - 1 編 - 4 章

4-6 積分

（執筆者：高橋大輔）［2009 年 9 月 受領］

（1）線積分

図のように曲線 C を n 個に分割し，k 番目の分点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ とする．更に C 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{r})$ を考え，k 番目の分割の適当な代表点における値を f_k とする．このとき分割を細かくする極限で和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_k\,(x_{k+1} - x_k)$ が一つの極限値に収束するとき，その極限値を C に沿う f の x に関する**線積分**といい，$\displaystyle\int_C f dx$ と表す．他の座標 y, z に関する線積分も同様．



更に，和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_k\,|\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{r}_k|$ の極限値が存在するとき，それを C に沿う f の線素に関する線積分といい，$\displaystyle\int_C f ds$ と表す．この曲線がパラメータ t によって $\boldsymbol{r}(t)\ (a \le t \le b)$ と表されており，上述の分割の番号が増える向きが t の増える向きとする．このとき線積分をパラメータの積分に書き換えると次式が成り立つ．

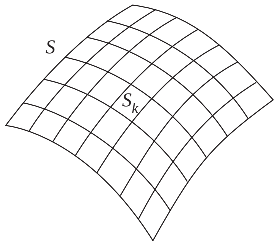
$$\int_C f dx = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))x'(t)dt, \qquad \int_C f ds = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

また，C 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (P(\boldsymbol{r}), Q(\boldsymbol{r}), R(\boldsymbol{r}))$ に対して k 番目の分割での値を $\boldsymbol{A}_k$ とする．和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}_k \cdot (\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{r}_k)$ の極限値は $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ と表し，次式のように書き換えることができる．ただし，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$ は C 上の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における接線ベクトルである．

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t} ds = \int_a^b \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

（2）面積分

図のように曲面 S を n 個に分割し，k 番目の分割領域の面積を S_k とする．また，S 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{r})$ のその分割領域における適当な代表点での値を f_k とする．分割を細かくする極限での和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k S_k$ の極限値を $\displaystyle\int_S f dS$ と表し，$f(\boldsymbol{r})$ の S 上での**面積分**という．



S の任意の点の位置ベクトルを二つのパラメータ u, v によって $\boldsymbol{r}(u, v)$（$a \le u \le b, c \le v \le d$）と表したとき，

$$\int_S f dS = \int_c^d \int_a^b f(\boldsymbol{r}(u,v))\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| du dv$$

となる．曲面 S の任意の点（位置ベクトル $\boldsymbol{r}$）において，片側の面から外に向かって出る単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ とする．S 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対する面積分 $\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ は $\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ とも書き，上記のパラメータで表現すると

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_c^d \int_a^b \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot\Big(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\Big)dudv$$

となる．ただし，$\boldsymbol{n}$ の向きと $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ の向きが逆になるときはこの積分値の符号を逆にする．

(3) 空間領域の積分

空間内の体積領域 V を n 個に分割し，k 番目の分割領域の体積を V_k とする．また，V で定義された関数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ のその分割領域における適当な代表点での値を φ_k とする．分割を細かくする極限での和 $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k V_k$ の極限値を $\int_V \varphi dV$ と書く．V の任意の点の位置ベクトルがパラメータ u, v, w（$a \le u \le b, c \le v \le d, e \le w \le f$）によって $\boldsymbol{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ と表されるとき，

$$\int_V \varphi dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \varphi(\boldsymbol{r}(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

となる．ここで J は**ヤコビアン**と呼ばれ次式で定義される．

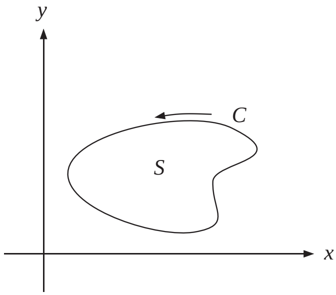
$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-7 積分定理

（執筆者：高橋大輔）［2009 年 9 月 受領］

（1）平面のグリーンの定理

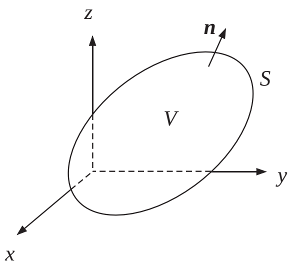


右図のように xy 平面において曲線 C に囲まれた有界領域 S を考える．このとき $P(x,y)$, $Q(x,y)$ について次式が成り立つ．

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_C Pdx + Qdy$$

ただし，線積分の向きは S の内部を左に見る方向とする．

（2）ガウスの発散定理



右図のように xyz 空間において曲面 S に囲まれた有界領域 V を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ に対して次式が成り立つ．

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$\boldsymbol{n}$ は S 上の外向き単位法線ベクトルである．この公式を成分で書くと次式となる．

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

（3）グリーンの定理

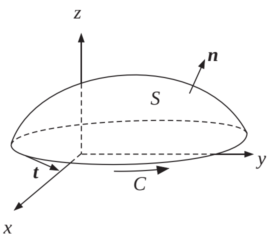
ガウスの発散定理と同じ領域を考え，その領域で関数 $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ を与える．すると以下の公式が成り立つ．

$$\int_V (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV = \int_S f\frac{\partial g}{\partial n} dS, \qquad \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV = \int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS$$

ただし，記号 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ は法線方向の方向微分係数 $\boldsymbol{n} \cdot \nabla f$ を表す．

（4）ストークスの定理

右図のように xyz 空間内に境界 C をもつ曲面 S を考える．S の表と裏を決め，表から外に出る単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を与える．このときベクトル場 $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$ に対して次式が成り立つ．



$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\, ds$$

なお，C の線積分の向きは，表側に乗って境界 C を歩くとき左側に曲面の内部が見える向きであり，$\boldsymbol{t}$ は C 上その向きの単位接線ベクトルである．この公式を成分で書くと次式となる．

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-8 微分形式

（執筆者：高橋大輔）［2009 年 9 月 受領］

前節で紹介した積分公式はどれも微分形式を用いた**ストークスの定理**

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

で統一的に表現できる．ここで D は n 次元領域，∂D は D の境界，ω は $n-1$ 次**微分形式**，$d\omega$ は ω の**外微分**を表す．k 次の微分形式とは**外積** $\wedge$ を用いて

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} f_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表される量である．外積は $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ という交代性をもち，$dx_i \wedge dx_i = 0$ となる．更に f の全微分を

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

とするとき，外微分 $d\omega$ を

$$d\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} df_{i_1 i_2 \cdots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

で与える．

例えば D を xyz 空間中の 2 次元領域 S とし，1 次微分形式 ω を $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ とする．このとき上記のストークスの定理から次式が導かれる．

$$\int_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dy\wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dz\wedge dx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\wedge dy = \int_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz$$

次に $\int_S f dx \wedge dy$ を通常の重積分 $\iint_S f dxdy$ とする等の書き換えにより，上式は前節のストークスの定理と一致する．

この他にも座標変換 $(x,y,z) \leftrightarrow (u,v,w)$ について $dx\wedge dy\wedge dz = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}du\wedge dv\wedge dw$ が外積，全微分から得られ，ヤコビアンが代数的な操作で自然に現れる．以上のように微分形式は，ベクトル解析に現れる諸量・諸公式の統一的な一般化として重要な視点を与える．

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-9 テンソル

（執筆者：高橋大輔）[2009 年 9 月 受領]

直交行列 P（成分 p_{ij}）で表された線形変換により，直交座標 (x_1, x_2, x_3)（基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$）を別の直交座標 $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$（基本ベクトル $(\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3)$）へ変換するとする．$\widetilde{x}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}x_j, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}\boldsymbol{e}_j$ が成り立つ．このとき，成分をもつ量 $\boldsymbol{A}$ の座標変換前後の成分表示を $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \widetilde{a}_1\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 + \widetilde{a}_2\widetilde{\boldsymbol{e}}_2 + \widetilde{a}_3\widetilde{\boldsymbol{e}}_3$ と表す．$\boldsymbol{A}$ が**ベクトル**ならば，a_i と $\widetilde{a}_i$ の間に $\widetilde{a}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}a_j$ が成り立つ．また**スカラー**は座標変換前後で値が変わらない量である．

量 $\mathsf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$ がこの座標変換によって $\widetilde{T}_{ij} = \sum_{a,b=1}^{3} p_{ia}p_{jb}T_{ab}$ と変換されるとき，T を（2 階の）**テンソル**といい，T_{ij} それぞれをテンソルの**成分**という．この定義によりテンソルの和 $\mathsf{T}+\mathsf{S}$（成分 $T_{ij}+S_{ij}$）やスカラー倍 $\varphi\mathsf{T}$（成分 φT_{ij}）もテンソルとなる．成分がすべて 0 のテンソルを**零テンソル**といい，二つのテンソル T と S の成分がすべて等しいとき，T と S が等しいとし $\mathsf{T} = \mathsf{S}$ と書く．

行列によるベクトルの線形変換と同じ形式でテンソル T のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ への線形作用 $\boldsymbol{w} = \mathsf{T}\boldsymbol{v}$ $\left(\text{すなわち } w_j = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}v_j\right)$ が定義され，$\boldsymbol{w}$ もベクトルとなる．テンソル T が $T_{ij} = T_{ji}$ を満たすとき，T を**対称テンソル**という．また，$T_{ij} = -T_{ji}$ を満たすとき**交代テンソル**という．対称，交代テンソルは物理などでしばしば登場する重要な量である．T が対称テンソルのとき $\mathsf{T}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となるような $\boldsymbol{v}\ (\neq \boldsymbol{0})$ を T の**主方向**といい，λ をその主方向の**主値**という．対称テンソルには互いに直交する三つの主方向が常に存在する．

27 個の成分を持つ量 T（成分 T_{ijk}）があり，直交行列 P で表された座標変換によりその量が $\widetilde{T}_{ijk} = \sum_{a,b,c=1}^{3} p_{ia}p_{jb}p_{kc}T_{abc}$ と変換されるとき，T を 3 階のテンソルという．同様にして n 階のテンソルが定義できる．この定義に従えば，最初に述べたテンソルは 2 階であり，ベクトルは 1 階のテンソルとなる．

■12 群 - 1 編 - 4 章

4-10 物理との関連

（執筆者：高橋大輔）[2009 年 9 月 受領]

今まで述べてきたベクトル解析の諸量・諸定理と物理の諸量・諸法則との関連について例をあげる．

(1) 剛体のつり合いと外積

原点を支点としてそのまわりに自由に回転できる剛体を考える．この剛体の複数の点 P_i（位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$，$1 \leq i \leq N$）に力 $\boldsymbol{F}_i$ が加わっているとする．このとき外積を用いて表される量 $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$ を力 $\boldsymbol{F}_i$ が原点まわりにもつ**モーメント**という．もし剛体が静止しているなら，つり合いの条件は $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$ となる．

(2) 流体の質量保存則

3 次元空間内の流体運動を考え，時刻 t，座標 (x, y, z) での密度を $\rho(x, y, z, t)$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ とする．このとき，**質量保存則**は $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$ と表すことができる．

(3) 循環

同様に 3 次元空間内の流体運動を考え，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ とする．任意に閉曲線 C をとったとき，C に沿っての線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} ds$ を**循環**と呼ぶ．例えば密度一定で粘性のない流体の場合，C を流れにのせて動かすなら循環が変化しないことを示せる．この法則を**ケルビンの循環定理**という．

(4) 静電場とガウスの法則

真空中に電荷が密度 $\rho(x, y, z)$ で分布しているとする．この電荷分布がもたらす電束 $\boldsymbol{D}(x, y, z)$ は，マクスウェル方程式の一つ $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ を満たす．更に閉曲面 S で囲まれた領域 V を考え，V 内の電荷の総量を Q とすると，この方程式の積分形として $\displaystyle\int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV = Q$ が得られる．これを**ガウスの法則**という．

(5) 慣性テンソル

空間内で剛体が原点のまわりに一定の角速度 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ で回転しているとする．剛体内の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$，密度を ρ とすると，剛体全体の角運動量 $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2, M_3)$ は外積を含む積分 $\displaystyle\boldsymbol{M} = \int_V \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \rho \, dV$ で表される．V は剛体の占める空間領域である．この式を整理し

$$I_{ij} = \Bigl(\int_V \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \rho \, dV \Bigr) \delta_{ij} - \int_V x_i x_j \rho \, dV$$

とおけば $\displaystyle M_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij} \omega_j$ となる．この I_{ij} のことを**慣性テンソル**という．