■12 群（電子情報通信基礎）－ 1 編（解析学・代数学）

7 章　超関数論

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

■概要■

物理学や工学に現れる Heaviside（ヘビサイド）関数，Dirac（ディラック）のデルタ関数などの不連続関数の微積分学の構築は，数学者の長年の夢であった．如何に数学的に意味をつけ，合理化するかというのが大きな問題であった．これらの関数に対するフーリエ変換の理論の拡張も目標の一つであった．1940 年代にフランスの数学者ローラン・シュワルツ（Laurent-Schwartz）は，線形位相空間の理論に基ずく超関数の理論（*Théorie des Distributions*）を構築し，これらの問題を解決した．

超関数の基本となる考え方は，シュワルツ以前にも，偏微分方程式論での弱い解という概念や，アダマール（Hadamard）により導入された発散積分の有限部分など，存在していた．超関数の導入により，フーリエ解析，偏微分方程式論をはじめ，現代数学は大きく進歩した．

超関数の理論には，大きく分けて 3 種類ある．**シュワルツ超関数の理論，ゲルファント・シロフ（Gelfand-Shilov）の一般化関数の理論，佐藤超関数の理論**である．

無限回微分ができ，かつ有界な台を持つ関数を，試験関数（test function）と呼ぶ．通常 $\mathfrak{D}$ で表す．$\mathfrak{D}$ は，帰納極限の位相を持ち，$\mathfrak{D}$ の持つ位相は距離づけができない．シュワルツ超関数は，試験関数の作る関数空間 $\mathfrak{D}$ から，複素数体 $\mathbb{C}$ への連続線形写像の事である．言い換えると試験関数の作る関数空間の双対空間の元である．試験関数は解析力学でラグランジュ（Lagrange）の方程式を導く際や，微分幾何学で曲面上の測地線の方程式を導びく際にでてくる．変分法ではおなじみの関数である．超関数の空間を $\mathfrak{D}'$ と表す．定義されている領域を明記する必要のある場合は，領域 V 上の超関数全体を $\mathfrak{D}'(V)$ と表す．“試験関数の空間が小さくなればその双対空間はより大きくなる” という原理に基づいてロシアのゲルファント・シロフ達のグループは，一般化関数の理論を打ち立てた．

例えば，ゲルファント・シロフ空間 S_1^1 の双対空間は，佐藤—河合のフーリエ超関数の空間と同型である．佐藤超関数の理論は，これらの定式化とは全く異なり関数空間の双対空間を用いない．$\dfrac{1}{x+i0}$，$F(x+i\Gamma 0)$ などの多変数正則関数の境界値が佐藤超関数の理論の出発点である．理論の構築には，多変数複素正則関数論とコホモロジー理論などの抽象代数学的な方法を用いる．場の量子論，ハイゼンベルグ（Heisenberg）の散乱行列（S-行列）理論，Regge（レッジェ）極理論などでは多変数複素正則関数の境界値が頻繁に現れる．複素正則関数論は，1 変数の場合は，複素平面が実 2 次元なので視覚的に理解しやすいが，2 変数以上の時は実 4 次元以上になり，直観的に理解する事が困難になる．この点は，佐藤超関数の理論はシュワルツ理論と大きく異なる．シュワルツ理論の場合は次元による差は大きくない．同一正則関数の異なる方向からの境界値は，異なる物理現象を表す．電子電子散乱（Mϕller 散乱），電子陽電子散乱（Bhabha 散乱）に現れる散乱行列要素などは全て同一正則関数の異なる方向からの境界値である．いろいろな方向からの正則関数の境界値を数学的に統制するために，佐藤超関数論では，相対コホモロジーの理論が使用される．正則関数の双対空間の元を解析汎関数と呼ぶ．フランスのアンドレ・マルチノー（Andre Martineau）は，“実領域に有界な台を持つ解析汎関数は，有界な台を持つ佐藤超関数と同じである” という事実を利用し，佐藤

理論の基礎づけを行った．実軸方向に指数減少する正則関数の双対空間の元をフーリエウルトラ超関数と呼ぶ.

例えば，虚軸上に台を持つデルタ関数 $\delta(x - ia)$,（$a \in \mathbb{R}$）は，フーリエウルトラ超関数である．フーリエウルトラ超関数は，定義域が実軸からはみ出しているので一般に台というものが定義できない．フーリエウルトラ超関数は，最近，“ハイゼンベルグの基本的長さ” を持つ場の量子論の研究に応用されている.

熱伝導法方程式の解の初期値として超関数を捉えるという**超関数に対する熱核の方法**は，名城大学の松澤忠人により佐藤超関数の理論を簡易化することを主な目的として 1980 年代に導入された．松澤理論は，韓国，セルビアで詳しく研究され，発展した．熱核の方法は，現在，シュワルツ超関数，ゲルファント・シロフ（Gelfand-Shilov）の一般化関数，佐藤超関数，更にフーリエウルトラ超関数に迄適用されている．例えば，フーリエ解析で重要なペーリーウイナーの定理の証明の簡易化に役立っている.

超関数の理論の最も厄介な問題は，超関数の積の問題である．場の量子論では**発散の困難**という問題に関係する．例えば，$\delta(x)\delta(x)$，$\dfrac{1}{x - i0}\dfrac{1}{x + i0}$ をどのように定義するかということである.

この困難を乗り越えるために開発されたのが，コロンボ（Colombeau）超関数である．オーストリアのウイーン大学のグループなどで研究されている.

【本章の構成】

本章では，シュワルツ超関数（7-2 節），佐藤超関数（7-3 節），リップマンーシュインガーの公式（7-4 節），超関数のフーリエ変換（7-5 節），超関数のフーリエ変換とラプラス変換（7-6 節），超関数の偏微分方程式への応用（7-7 節），超関数の標本化定理への応用（7-8 節），超関数のヒルベルト変換と正則関数の境界値（7-9 節），超関数と熱伝導方程式（7-10 節），超局所解析（7-11 節），について述べる.

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-1 シュワルツ超関数（Distribution）

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

ここではシュワルツ超関数について簡単に紹介する．無限回微分ができ，かつ有界な台を持つ関数を，試験関数（test function）と呼ぶ．通常 $\mathfrak{D}$ で表す．例えば，

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

で定義される関数は $\mathfrak{D}$ の元である．

ガウス関数 e^{-x^2} は有界な台を持たないので $\mathfrak{D}$ に属さない．$\mathfrak{D}$ には，帰納極限の位相が入るが，$\mathfrak{D}$ は，距離空間にはならない．帰納極限の位相に関しては，次のような言い換えができる．

（i）$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の台はすべて一つの有界閉集合 K に含まれている．

（ii）$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in K} |D^{\alpha} f_n(x)| = 0$

ここで $D^{\alpha} f_n(x)$ は α 階偏導関数を表す．（i），（ii）を満たす時，$f_n(x) \in \mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D}$ 上ゼロに収束すると定義する．言い換えるとある有界集合上ですべての偏導関数がゼロに一様に収束している時にゼロに収束すると定義するわけである．シュワルツ超関数は，試験関数の作る関数空間 $\mathfrak{D}$ から，複素数体 $\mathbb{C}$ への連続線形写像である．通常の関数（局所可積分関数）$f(x)$ は，

$$< T_f, \phi(x) >= \int f(x)\phi(x)dx,$$

$$(\phi(x) \in \mathfrak{D})$$

$$f \longrightarrow T_f$$

というにして超関数とみなされる．例えば，ヘビサイド関数の定義は，

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

であるが，

$$< H, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi(x)dx = \int_0^{\infty} \phi(x)dx, \qquad (\phi(x) \in \mathfrak{D})$$

という風にして超関数と考える．デルタ関数は，$< \delta, \phi >= \phi(0) \quad (\phi(x) \in \mathfrak{D})$ と定義する．

物理学の本などでは，

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)dx = f(0)$$

と書いてある．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy = f(x)$$

これは，デルタ関数が，畳み込みに関して単位元になっている事を示す．T を超関数とするとき，無限回微分可能関数 $a(x)$ との積 $a(x)T$ は，$< a(x)T, \phi > = < T, a(x)\phi(x) >$ と定義する．例えば，$x\delta(x) = 0$ である．逆に，$xT = 0$ を満たす超関数 T は，デルタ関数の定数倍である事が知られている．

T を超関数とするとき，その微分 $\dfrac{dT}{dx}$ は，$< \dfrac{dT}{dx}, \phi > = - < T, \dfrac{d\phi}{dx} >$ と定義される．これは通常の関数の部分積分の公式を基にしているのである．

$$\frac{dH}{dx} = \delta(x)$$

が成立する事が分かる．

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

と定義すると

$$\frac{dx_+}{dx} = H(x)$$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

と定義すると

$$\frac{d|x|}{dx} = sgn(x)$$

である．

試験関数の空間の位相が帰納極限の位相という高級なものであったにもかかわらず，シュワルツ超関数の空間の位相は非常に簡単である．各点収束の位相がはいる．T_n，$(n \in \mathbb{N})$，T をシュワルツ超関数とする．

$\lim_{n\to\infty} < T_n, \phi > = < T, \phi > \quad (\forall \phi \in \mathcal{D})$ である時，シュワルツ超関数の空間 $\mathcal{D}'$ で $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ である．

例． $\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0$

言い換えると，$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin nx\phi(x) dx = 0 \qquad (\forall \phi \in \mathcal{D})$

普通の収束の意味では，極限 $\lim_{n\to\infty} \sin nx$ は不確定であるが，シュワルツ超関数の空間 $\mathcal{D}'$ ではゼロである．

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-2 佐藤超関数（Hyperfunction）

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

佐藤超関数は 1 次元の場合，正則関数 $F(z)$ の上半平面からの境界値 $F(x+i0)=\lim_{y\to 0}F(x+iy)$ と下半平面からの境界値 $F(x-i0)=\lim_{y\to 0}F(x-iy)$ を用いて $F(x+i0)-F(x-i0)$ で表される．$F(z)$ は，佐藤超関数 $F(x+i0)-F(x-i0)$ の定義関数と呼ばれる．ヘビサイド関数 $H(x)$ を例にとって説明する．これを説明しよう．ヘビサイド関数 $H(x)$ の定義関数としては，

$$F(z)=\frac{-1}{2\pi i}\log z$$

がある．

対数関数の枝は $0\le \arg(z)<2\pi$ とする．$F(x+i0)-F(x-i0)=H(x)$ が成立する．

コーシーの積分公式 $f(0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz$ に注目して，デルタ関数 $\delta(x)$ を $\dfrac{1}{z}$ の境界値として定義する．

$$\delta(x)=\frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)$$

と定義する．微分については，定義関数のレベルで考える．

$$\frac{d\log z}{dz}=\frac{1}{z}$$

であるので，

$$\frac{dH(x)}{dx}=\delta(x)$$

は，ほとんど自明な事になる．

佐藤超関数論では，フーリエ変換を次のように考える．1 次元の場合の

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}d\xi=\delta(x)$$

を例にとって説明する．収束因子をいれていわゆるアーベル極限というものを考える．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon|x|}e^{ix\xi}d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-\varepsilon|x|}e^{ix\xi}d\xi+\int_{0}^{\infty}e^{-\varepsilon|x|}e^{ix\xi}d\xi$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)$$

ヘビサイド関数 $H(x)$ のフーリエ変換も同様に計算できる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{ix\xi}d\xi = \int_{0}^{\infty} e^{ix\xi}d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon|x|}e^{ix\xi}d\xi$$

$$\frac{1}{x+i0}$$

このような考え方で計算されているものとしては，ラザフォード散乱における散乱断面積の計算 $\int_{0}^{\infty} \sin axdx = \frac{1}{a}$ がある．

多変数の佐藤超関数論は，多変数複素正則関数論に基礎をおく．

$\lim_{y\to 0, y\in\Gamma} F(x+iy) = F(x+i\Gamma 0)$ などの多変数正則関数の境界値が佐藤超関数である．任意の領域で定義された佐藤超関数は，全空間に拡張する事ができる．これは，シュワルツ超関数にはない性質である．両者の大きな差である．多変数の佐藤超関数の定義を書くのは，大仕事である．ここでは省略する．佐藤超関数の空間に，自然なハウスドルフ位相が入るかどうかはよく分かっていない．

しかし，ゲルファント・シロフ空間と同型である佐藤—河合のフーリエ超関数の空間には自然なハウスドルフ位相が入る．実軸上の無限回微分可能関数で条件 $|g(x)| \le Ae^{-a|x|}$, $|\hat{g}(\xi)| \le Be^{-b|\xi|}$，を満たすものは，ゲルファント・シロフ空間 S_1^1 と呼ばれる．

ゲルファント・シロフ空間 S_1^1 はフーリエ変換で不変である事が知られている．例えば，ガウス関数 e^{-x^2}, $\frac{1}{\cosh x}$ は，S_1^1 の元である．S_1^1 の双対空間 $(S_1^1)'$ は，フーリエ超関数の空間と同型になる．フーリエ超関数の空間から佐藤超関数の空間へは，自然な制限写像が存在するが，この制限写像は１対１ではない．この制限写像の核は，無限遠にのみ台を持つフーリエ超関数である．佐藤超関数の空間を $\mathcal{B}$ と表す事が多い．

シュワルツ超関数は，佐藤超関数の真部分集合であるので，$\mathcal{D}' \subset \mathcal{B}$ となる．

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-3 リップマン・シュインガー（Lippmann - Schwinger）の公式

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

$\dfrac{1}{x}$ は，$\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数ではない．従って，$\mathbb{R}$ 上の超関数にするために次のような工夫をする．

$$< P.V.\frac{1}{x}, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx$$

$$< \frac{1}{x + i0}, \phi >= \lim_{y \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x + iy} dx,$$

$$< \frac{1}{x - i0}, \phi >= \lim_{y \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x - iy} dx,$$

$$P.V.\frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{x + i0}, \qquad \frac{1}{x - i0}$$

は，どれも，$\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上に制限すると $\dfrac{1}{x}$ に等しい．次が成り立つ．

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0}\right)$$

次は，**リップマン・シュインガーの公式**と呼ばれている．

$$\frac{1}{x + i0} = P.V.\frac{1}{x} - \pi i \delta(x)$$

$$\frac{1}{x - i0} = P.V.\frac{1}{x} + \pi i \delta(x)$$

リップマン・シュインガーの公式から，

$$P.V.\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0}\right)$$

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0}\right)$$

が分かる．

なお，最後の表示式は，次元が高い場合には，ラドン（Radon）変換に関連して

$$\delta(x) = \frac{(n - 1)!}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{i^n}{(< a, x > +i0)^n} d\omega(a), \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

となる．デルタ関数の平面波分解と呼ばれている．

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-4 超関数のフーリエ変換

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

シュワルツ超関数の中で緩増加超関数と呼ばれているものはフーリエ変換が可能である．

$$\mathcal{S} = \{f(x) \in C^\infty : \lim_{|x|\to\infty} (1 + x^2)^k D^m f(x) = 0\}$$

とおく．$\mathcal{S}$ を急減少関数の空間と呼ぶ．ガウス関数 e^{-x^2} は $\mathcal{S}$ に属す．$\mathcal{S}$ はフレッシェ（Frechét）空間の位相を持つ．$\mathcal{S}$ はフーリエ変換で安定している事が知られている．フーリエ変換は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への 1 対 1 の連続な変換である．$\mathcal{S}$ の双対空間を $\mathcal{S}'$ と表し，$\mathcal{S}'$ の元を緩増加超関数（Tempered distribution）と呼ぶ．

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ 特に，試験関数の空間 $\mathcal{D}$ は，$\mathcal{S}$ の中で稠密であるので，$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ である．$e^x \in \mathcal{D}'$ であるが $e^x \notin \mathcal{S}'$ である．従って，$\mathcal{S}'$ は $\mathcal{D}'$ の真部分集合である．フーリエ変換は $\mathcal{S}'$ から $\mathcal{S}'$ への 1 対 1 の連続な変換である．

有界な関数，あるいは，多項式程度の増大度を持つ関数（緩増加関数）は，緩増加超関数とみなすことができる．例えば

$$\frac{\sin x}{x}, \sin(e^x), e^{ix}$$

はすべて緩増加超関数である．従って，これらの超関数はフーリエ変換が可能である．しかし，$e^x \notin \mathcal{S}'$ であるので，シュワルツ超関数の範囲では e^x はフーリエ変換できない（フーリエウルトラ超関数の範囲ではできる）．緩増加関数の微分として得る事ができる超関数は，緩増加超関数である．

$$e^x \cos e^x = \frac{d \sin e^x}{dx}$$

であるので，$e^x \cos e^x \in \mathcal{S}'$ である．逆に，緩増加超関数は，緩増加な普通の関数の微分として得る事ができる事が知られている（緩増加超関数の構造定理）．古典的なパーセバルの等式を基に双対性を用いて，緩増加超関数 T のフーリエ変換 $\hat{T}$ を次のように定義する．

$$< \hat{T}, f >=< T, \hat{f} >, \quad (f \in \mathcal{S})$$

例えば，

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} d\xi = \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{ix\xi} d\xi = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{ix\xi} d\xi = i\pi sgn(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + i0} e^{ix\xi} d\xi = H(x)$$

である．ただし，

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

リップマン・シュインガーの公式は，$sgn(x) + 1 = 2H(x)$ の両辺をフーリエ変換（逆フーリエ変換）すれば得る事ができる．

有界な台を持つ超関数と次の条件（i)，（ii）を満たす整関数は，フーリエ変換により，一対一に対応する

（i）$f(z)$ は整関数

（ii）$|f(x+iy)| \leq A(1+|x|)^m e^{B|y|}$

（**ペーリーウイナー（Paley-Wiener）の定理**）

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-5 超関数のラプラス変換とフーリエ変換の関係

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

$x \in V \Longrightarrow tx \in V$（$\forall t > 0$）を満たす集合 V を錐と呼ぶ．例えば，正の実軸，負の実軸は 1 次元の錐である．第一象限は 2 次元の錐である．場の理論では光円錐が出てくる．錐に台を持つ緩増加超関数は，同じ錐に台が含まれる連続関数の有限回微分で表示できる事が分かっている（**ブロス・エプスタイン（Bros - Epstein）の定理**）．

例 1．（ブロス・エプスタインの定理）

$$\frac{dx_+}{dx} = H(x)$$

$x_+, H(x)$ は，それぞれ錐 $[0, \infty)$ に台を持つ連続関数，緩増加超関数である．錐に台を持つ緩増加超関数は，ラプラス変換が可能である．錐 V に台を持っていると，そのラプラス変換は，$\mathbb{R}^n + i\tilde{V}$ 上の正則関数となる．ここで，

$$\tilde{V} = \{y :< x, y >> 0 \quad \forall x \in V\}$$

は，V の双対錐である．一般には，V は，$\tilde{V}$ とは異なる．特別な場合には等しくなる事がある．

例 2．正の実軸，第一象限，光円錐の双対錐は自分自身と等しい．フーリエ変換はラプラス変換の境界値として表示できる．ロシアのウラジミロフ（Vladimirov）のグループによる詳しい研究がある．錐に台を持つ超関数は次のようにして作る事ができる．$\chi_\Gamma(x)$ を，錐 Γ の特性関数とする．すなわち，

$$\chi_\Gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma \\ 0, & x \notin \Gamma \end{cases}$$

f を超関数とし，$g = f * F^{-1}\chi_\Gamma$ とおく．g のフーリエ変換は，錐 Γ に台を持つ．一般に，$F^{-1}\chi_\Gamma$ は超関数である．

1 次元の場合に詳しく見てみよう．$\Gamma = [0, \infty)$ とおくと，

$$(F^{-1}\chi_\Gamma)(x) = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{x + i0}$$

である．

$$g = \frac{1}{2\pi i} f * \frac{1}{x + i0}$$

となる．積分を用いて次のように書く事もできる．

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{t - x + i0} dx$$

Lippmann-Schwinger 関係式を用いると次のようになる．

$$g(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{i}{2\pi}(f * \frac{1}{x})(t)$$

信号処理の研究者達は，これを**解析信号**と呼んでいる．

$$g(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{i}{2\pi}(f * \frac{1}{x})(t)$$

のフーリエ変換は,

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)H(\xi)$$

ここで $H(\xi)$ は，ヘビサイド関数である．従って
$\hat{g}(\xi)$ は，負の実軸上でゼロとなる．逆フーリエ変換を考えると

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{it\xi}d\xi$$

このため $g(t)$ は上半平面で正則な関数

$$g(t + iy) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{i(t+iy)\xi}d\xi$$

に解析接続され，$g(t)$ は，上半平面からの境界値

$$\lim_{y\to 0} g(t + iy) = g(t + i0)$$

として表示される．このことから $g(t)$ は解析信号と呼ばれる．次元が高い場合の解析接続に関する定理としては次が知られている．

Bogolyubov の楔の刃の定理

Γ を錐とする．

$$\lim_{y\to 0, y\in\Gamma} F(x + iy) = F(x + i\Gamma 0),$$

$$\lim_{y\to 0, y\in\Gamma} F(x - iy) = F(x - i\Gamma 0)$$ とおく．

もし,

$$F(x + i\Gamma 0) = F(x - i\Gamma 0)$$

が超関数として成立すると，$F(z)$ は実軸の近傍に解析接続される．

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-6 超関数の偏微分方程式への応用

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

偏微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を D と略記し，定数係数の偏微分作用素を $P(D)$ と表す．$P(D)E = \delta(x)$ を満たす超関数解を偏微分作用素 $P(D)$ の**基本解**と呼ぶ．

例 1．（$\dfrac{d}{dx}$ の基本解）

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$$

である．つまり，ヘヴィサイド関数は 1 階の微分作用素の基本解である．

例 2．（$\dfrac{d^2}{dx^2}$ の基本解）

$$\frac{d^2 x_+}{dx^2} = \delta(x)$$

である．

例 3．（ニュートン（Newton）ポテンシャル）

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}$$

とおく．

$$E(x) = c_n |x|^{2-n}, \quad (n \geq 3)$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{2(2-n)\sqrt{\pi}} \quad (n \geq 3)$$

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$$

とおくと，$E(x)$ は，$\Delta E(x) = \delta(x)$ を満たす．

例 4．

$$E(x) = \frac{e^{ikx}}{|x|}$$

とおくと $E(x)$ は，$(\Delta + k^2)E(x) = \delta(x)$ を満たす．基本解の存在を示すには形式的には次のようにすれば良い．まず，$P(D)E = \delta(x)$ の両辺をフーリエ変換する．

$$P(\xi)\hat{E} = 1$$

フーリエ逆変換して，

$$E(x) = \int \frac{1}{P(\xi)} e^{ix\xi} d\xi$$

1950 年代にエーレンプライス（Ehrenpreis），マルグランジュ（Malgrange）により定数係数の偏微分作用素の基本解の存在が厳密に証明された．これにより，すべての定数係数の偏微分方程式は解ける事になった．

偏微分方程式 $P(D)u = f$ の解 u を構成することを考える．$P(D)$ の基本解を E とする．

$u = E * f$ とおく．

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E * f)$$

$$= \delta * f = f$$

である．

$P(D)$ の基本解は一意的ではない．斉次方程式 $P(D)u = 0$ の解の不定差がある．$P(D)$ の基本解を E とし，u を斉次方程式 $P(D)u = 0$ の解とすると $E + u$ も又 $P(D)$ の基本解である．

すべての定数係数の偏微分方程式は解ける事になったので，次の目標は，当然，変数係数の偏微分方程式の解の存在定理であった．このような状況で登場したハンスーレビ（Hans Lewy）による解のない偏微分方程式の例

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + 2(x + iy)\frac{\partial u}{\partial t} = f$$

は，学会に衝撃を与えた．

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-7 超関数の標本化定理への応用

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

通常は，実軸上二乗可積分な関数（信号）に対し考えるが，超関数を使うと適用範囲を広げる事ができる．

シャノン−染谷の標本化定理 1

（i）$f(z) \in L^2(-\infty, \infty)$

（ii）$f(z)$ は整関数

（iii）$|f(x+iy)| \leq Ae^{\pi|y|}$

であると

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(n)\sin\pi(z-n)}{\pi(z-n)}$$

が成立する．超関数を使うと条件（i）をはずし，適用範囲を広げる事ができる．例えば多項式についても標本化定理は成立する．

シャノン−染谷の標本化定理 2

（ii）$f(z)$ は整関数

（iii）$|f(x+iy)| \leq A(1+|x|)^m e^{B|y||}$

$0 \leq B < \pi$ であると

$$f(z) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(n)\sin\pi(z-n)}{\pi(z-n)} e^{-\delta|n|}$$

が成立する．π は，ナイキスト周波数に対応している．

例．（ドーガル（Dougall）展開）

$$P_z(\cos\theta) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n(\cos\theta)\sin\pi(z-n)}{\pi(z-n)} e^{-\delta|n|},$$

$$= \frac{\sin\pi z}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{z+n+1}\right)P_n(\cos\theta)$$

$P_z(\cos\theta)$，（$|\theta| < \pi$）は，ルジャンドル（Legendre）関数．

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-8 超関数のヒルベルト変換と正則関数の境界値

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

有界な台を持つシュワルツ超関数の空間は，無限回微分可能関数の作る空間 C^∞ の双対空間である事が知られている．$\mathcal{E}$ と表示されることが多い．有界な台を持つ超関数に対してはヒルベルト変換が定義でき，複素正則関数による境界値表示が可能となる．佐藤超関数の理論では，定義関数を求める際に重要である．超関数 $F(t)$ をコンパクトな台を持つ超関数とする．$F(t)$ と $\dfrac{1}{t}$ の畳み込みを $F(t)$ のヒルベルト（Hilbert）変換と呼ぶ．コーシーヒルベルト（Cauchy-Hilbert）変換と呼ばれる事もある．

$$H(F)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{z-t} dt$$

$H(F)(z)$ は，$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ で正則な関数になる．次の再現公式（境界値表示）が成立する．

超関数の境界値表示

$$H(F)(t+i0) - H(F)(t-i0) = 2\pi i F(t)$$

例 1．（n 次のルジャンドル多項式のヒルベルト変換）

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{z-t} dt$$

$Q_n(z)$ は，第二種のルジャンドル関数である．$Q_n(x+i0) - Q_n(x-i0) = -\pi i P_n(x)$，ノイマン（Neumann）の公式と呼ばれている．

例 2．（特性関数のヒルベルト変換）

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_{[-1,1]}(t)}{z-t} dt$$

例 3．（ディラックのデルタ関数のヒルベルト変換）

$$\frac{1}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{z-t} dt$$

$$\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0} = -2\pi i \delta(x)$$

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-9 超関数と熱伝導方程式

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

佐藤超関数の理論は，1 変数の場合は，1 変数複素関数論がわかりやすいので大変理解しやすい．しかし，高次元の場合は多変数複素正則関数論とホモロジー代数学の手法が必要である．これらを勉強するには，多くの準備が必要であり，従って佐藤超関数の理論を理解するには数年は必要である．

超関数に対する熱核の方法は，名城大学の松澤忠人により佐藤超関数の理論の簡易化を主な目的として 1980 年代に提案された．松澤理論は，韓国のソウル大学のグループとセルビアの Novi Sad（ノビ・サド）大学のグループにより詳しく研究された．

熱伝導法方程式の解の初期値として超関数を捉えるというのが松澤忠人のアイデアである．緩増加超関数 T に対し，$U_T(x,t) = (T * E)(x,t) =< T_u, E(x-u,t) >$, とおく．ただし，

$$E(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-\frac{x^2}{4t}),$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

$E(x,t)$ は，熱核と呼ばれ，次に示すように，熱伝導方程式の基本解である．

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \Delta E(x,t), \ (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

$$\lim_{t \to 0} E(x,t) = \delta(x)$$

定理．（緩増加超関数の熱核による特徴づけ）$U_T(x,t)$ は，無限回微分可能関数であり，次を満たす．

(1) $\dfrac{\partial U_T(x,t)}{\partial t} = \Delta U_T(x,t)$,（$x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$）

(2) $|U_T(x,t)| \leq Ct^{-m}(1+|x|)^k$,（$x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, m > 0$）

超関数 T を $U_T(x,t)$ から次のように再現できる．

(3) $< T, g >= \lim_{t \to 0} \int_{R^n} U_T(x,t) g(x) dx$,（$g \in \mathfrak{D}$）

$\mathfrak{D}$ はシュワルツ超関数の基礎である試験関数（有界な台を持つ無限階微分可能関数）の全体である．

逆に無限回微分可能関数 $U(x,t)$ が（1）と（2）を満たすと緩増加超関数 $T \in S'$ が存在して $U(x,t) = (T * E)(x,t)$ となる．

例 1．（ヘビサイド関数）$T = H(x)$ とおく．

$$U_T(x,t) = (E * H)(x) = \int_{-\infty}^{x} E(y,t) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds$$

$$\lim_{t \to 0} U_T(x, t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

定理の（3）の部分は，漸近展開を用いて更に詳しく分析する事ができる．T を緩増加超関数とすると，$U_T(x, t)$ は，$t \to 0$ の時，次の漸近展開を持つ．

$$U_T(x, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n T}{n!} t^n, \ (t \to 0)$$

例 2．（熱核 $E(x, t)$ の漸近展開）

T をディラックのデルタ関数とする．$U_T(x, t) = E(x, t)$ である事から，

$$E(x, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n \delta}{n!} t^n, \ (t \to 0)$$

が成立する．Δ はラプラシアンである．熱核 $E(x, t)$ は，無限遠方での減少度がすばらしく早いので様々な超関数，例えば，Gelfand - Shilov（ゲルファント・シロフ）の一般化関数などに対しても適用する事ができる．

■12 群 - 1 編 - 7 章

7-10 超局所解析（超関数の波面集合）

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

1960 年代後半に佐藤超関数論は大きな転機を迎えた．佐藤幹夫はラドン（Radon）変換，特に “ディラックのデルタ関数の平面波分解” と場の量子論で出てくる Bogolyubov（ボゴリューボフ）の “楔の刃の定理” にヒントを得て超関数の特異性を余接方向（物理学の言葉では，相空間）に分解する方法を見出した．楔の刃の定理に対しコホモロジー論的解釈を与え，拡張したフランスのアンドレ・マルチノー（Andre Martineau）の寄与が大きい．

超関数の特異性は，マイクロ関数の台である特異スペクトルを用いて解析される．このような研究手法は，現在，超局所解析学と称されている．佐藤—河合—柏原は，マイクロ関数の理論（層 C の理論）の構築し，変数係数線形偏微分方程式論を完成させた．これは，佐藤—河合—柏原（通称，SKK）理論と呼ばれている．

ヘルマンダー（Hörmander）達も，C^∞ 波面集合と解析的波面集合 WF_A を導入し，シュワルツ超関数の範囲で同様な研究を行った．公理論的な場の量子論やハイゼンベルグの S - 行列の研究者達（J. Bros，D. Iagolnitzer）は，同時期に非線形フーリエ変換（FBI 変換）を導入し，本質台（Essential Support）という概念を定義し関数の実解析性を FBI 変換により，特徴づけ，シュワルツ超関数の特異性を分解することを佐藤幹夫のグループ，ヘルマンダーのグループとは独立に行った．シュワルツ超関数に対しては，解析的波面集合，本質台，特異スペクトルは，一致することが知られている．

超関数の特異スペクトル

超関数 T の特異スペクトル $S.S.(T)$ は次のように定義される．$(x_0, a_0) \notin S.S.(T)$ であるとは

$$T(x) = \sum F_j(x + \sqrt{-1}\Gamma_j)$$

が x_0 の近傍 U で成り立つ事である．

$\Gamma_j \subset \{y :< a_0, y >< 0\}$ は，錐状集合であり，F_j は，無限小楔 $U + i\Gamma_j 0$ の上の正則関数である．$F_j(x + \sqrt{-1}\Gamma_j)$ は，$F_j(x + iy)$ の Γ_j に沿っての境界値である．

上の条件が満たされている時，超関数 $T(x)$ は，(x_0, a_0) の近傍で “マイクロ解析的（Micro Analytic）” である．

例 1．

$$S.S.\left(\frac{1}{x + i0}\right) = (0, 1)$$

$$S.S.\left(\frac{1}{x + i0}\right) = (0, -1)$$

$$S.S.(\delta(x)) = (0, \pm 1)$$

緩増加超関数 T に対し，その FBI 変換 は，次のように定義される．

$$< T_u, \exp(-i < u, a > + \frac{|a|(x - u)^2}{2}) >$$

一方，空間変数を複素化した $U_T(x-iy,t)$ は,

$$U_T(x-iy,t)$$

$$=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp(\frac{y^2+2i<x,y>}{4t})$$

$$<T_u,\exp(\frac{-i<u,y>}{2t}-\frac{(x-u)^2}{4t})>$$

で定義される．

FBI（Fourier- Bros - Iagolnitzer）変換という呼び方は 1980 年代に現れた．

複素熱核と超関数の超局所解析性

空間変数を複素化した $U_T(x-iy)$ と FBI 変換の間の関係を用いて，Sjöstrand, 松澤は次を得た．

定理．（Sjöstrand，松澤）

緩増加超関数 T が (x_0,a_0) でマイクロ解析的であるための必要十分条件は，正の定数 C,c_1, x_0 の近傍 $U(x_0)$, a_0 の近傍 $V(a_0)$ が存在し,

$$|U_T(x-iy,t)|\leq C\exp(\frac{y^2}{4t}-\frac{c_1}{t}),$$

$$(\forall x\in U(x_0),\forall y\in V(a_0),t>0)$$

が，成立することである．

系．（Sjöstrand，松澤）

緩増加超関数 T が x_0 の近傍で実解析的であるための必要十分条件は 正の定数 C, x_0 の近傍 $U(x_0)$ が存在し

$$|U_T(x-iy,t)|\leq C\exp(\frac{y^2}{4t}-\frac{c_1}{t}),\ (\forall x\in U(x_0),t>0)$$

が，成立することである．

例 2．（$T=\delta(x)$）

この場合,

$$|U_T(x-iy,t)|=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{y^2}{4t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

従って，$\mathrm{supp}(\delta(x))=\{0\}$. $\mathrm{S.S.}(\delta(x))=\{0\}\times S^{n-1}$