■12 群（電子情報通信基礎）－ 2 編（離散数学）

5 章 マトロイド理論

（執筆者：岩田 覚）[2009 年 7 月 受領]

■概要■

マトロイド（matroid）は, 線形空間内のベクトル集合の一次独立・従属といった概念の組合せ論的な抽象化として，1930 年代に導入された．当初は，純粋に数学的な対象として，研究が進められていたが，1960 年代以降，回路網解析，剛性解析，システム解析など，様々な分野への応用研究が展開されて，工学における重要性が認識されるに至った[1, 2, 3]．

本章では，マトロイドの基礎概念を紹介するとともに，組合せ最適化におけるマトロイド理論の役割を解説する．組合せ最適化問題のなかには，最小木問題や最大流問題のように効率的なアルゴリズムが存在するものと，効率的な厳密解法の設計は本質的に無理であろうと考えられている NP 困難な問題がある．実用上有用な組合せ最適化問題の多くが NP 困難であるとはいえ，効率的に解くことのできる組合せ最適化問題の構造を正確に把握して，できるだけ一般的な設定で通用する汎用解法を整備することは，NP 困難な問題に対する現実的な対処法を研究するうえでも重要である．

このような観点から，効率的に解くことのできる多くの組合せ最適化問題に共通の構造として，マトロイドが注目されてきた．特に，最小木問題に対するアルゴリズムを一般化して，マトロイドにおける最小重みの基を見出す貪欲アルゴリズムが得られた．また，2 部グラフのマッチングに関するアルゴリズムは，マトロイド対の共通独立集合に関するアルゴリズムに一般化された．これらの知見は，多くの具体的な組合せ最適化問題に適用可能な汎用解法を提供している．

効率的なアルゴリズムの設計には，マトロイドの諸性質のなかでも，階数関数の劣モジュラ性が本質的である．実際，マトロイドの階数関数に限らず，一般の劣モジュラ関数に関する最適化問題が深く研究されてきた．特に劣モジュラ関数の最小化に関する研究は，最近でも新たな展開を見せている．

【本章の構成】

はじめに，5-1 節では，マトロイドの公理系と基礎的な概念を紹介する．特に，最小重みの基を見出す貪欲アルゴリズムを解説するとともに，双対マトロイドやマイナーの概念を解説する．続いて，5-2 節では，マトロイド対の共通独立集合に関する最適化問題とその解法を解説する．最後に，5-3 節では，一般の劣モジュラ関数で定義される基多面体上の最適化問題と劣モジュラ関数の最小化問題を解説する．

■12 群 - 2 編 - 5 章

5-1 マトロイド

(執筆者：岩田 覚)[2009 年 7 月 受領]

5-1-1 マトロイドの公理系

マトロイド（matroid）は，線形空間内のベクトル集合の一次独立・従属といった概念の組合せ論的な側面を抽象化して得られる公理系を満たすものとして，Whitney（1935）などによって定義された[4)]．有限集合 E とその部分集合族 $\mathcal{I}$ が以下の (I0)–(I2) を満たすとき，$(E, \mathcal{I})$ をマトロイドと呼ぶ．

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I \subseteq J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$.

(I2) $I, J \in \mathcal{I}, |I| < |J| \Rightarrow \exists j \in J \setminus I \colon I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$.

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ において，E を $\mathbf{M}$ の台集合（ground set），$\mathcal{I}$ を独立集合族という．独立集合族 $\mathcal{I}$ の元 $I \in \mathcal{I}$ は，$\mathbf{M}$ の独立集合（independent set）と呼ばれる．

マトロイドの最も典型的な例は，線形マトロイド（linear matroid）であろう．体 $\mathbf{K}$ 上の行列 M の行集合を R，列集合を E とし，一次独立な列ベクトル集合に対応する列部分集合の全体を $\mathcal{I}$ とする．すなわち，

$$\mathcal{I} = \{J \mid J \subseteq E,\ \mathrm{rank}\, M[R, J] = |J|\}.$$

ただし，$M[R, J]$ は，行集合 R，列集合 J で定められる M の小行列を表す．このとき，$(E, \mathcal{I})$ は (I0)–(I2) を満たし，マトロイドになる．このようにして得ることのできるマトロイドを線形マトロイド，または行列的マトロイド（matric matroid）という．

独立集合のうちで，集合の包含関係に関して極大なものを基（base）と呼ぶ．公理 (I2) から明らかなように，基の要素数はすべて等しい．この数をマトロイド $\mathbf{M}$ の階数（rank）という．基の全体を基族と呼ぶ．基族 $\mathcal{B}$ は以下の (B0)–(B1) を満たす．

(B0) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B1) $B, B' \in \mathcal{B}, b \in B \setminus B' \Rightarrow \exists e \in B' \setminus B \colon (B - \{b\}) \cup \{e\} \in \mathcal{B}$.

任意の部分集合 $X \subseteq E$ に対して，

$$\rho(X) = \max\{|I| \mid I \subseteq X,\ I \in \mathcal{I}\} \tag{5・1}$$

と定義する．この関数 $\rho : 2^E \to \mathbf{Z}$ がマトロイド $\mathbf{M}$ の階数関数（rank function）である．階数関数 ρ は以下の (R0)–(R3) を満たしている．

(R0) $\rho(\emptyset) = 0$.

(R1) $\forall X \subseteq E \colon \rho(X) \leq |X|$.

(R2) $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.

(R3) $\forall X, Y \subseteq E$: $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y)$.

特に，(R3) は，劣モジュラ性（submodularity）と呼ばれる性質で，マトロイドに関する効率的なアルゴリズムに本質的な役割を果たしている．

　ここでは，(I0)–(I2) によって，マトロイドを定義したが，(B0)–(B1) を満たす基族 $\mathcal{B}$ から，マトロイドを定義することもできる．この場合，独立集合は，基の部分集合として定義される．同様に，(R0)–(R3) を満たす階数関数によって，マトロイドを定義することも可能である．独立集合族は，$\mathcal{I} = \{I \mid \rho(I) = |I|\}$ によって定められる．

　マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ において，独立でない E の部分集合は従属であるといい，極小な従属集合はサーキット（circuit）と呼ぶ．サーキットの全体 $\mathcal{C}$ に関して，以下の (C0)–(C2) が成立する．

(C0) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C1) $C, C' \in \mathcal{C}, C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$.

(C2) $C, C' \in \mathcal{C}, C \neq C', j \in C \cap C' \Rightarrow \exists C^\circ \in \mathcal{C}$: $C^\circ \subseteq (C \cup C') - \{j\}$.

逆に，(C0)–(C2) でマトロイドを定義することも可能である．

　各部分集合 $X \subseteq E$ に対して，

$$\mathrm{cl}(X) = \{j \mid \rho(X) = \rho(X \cup \{j\})\}$$

と定義する． 関数 cl は閉包関数（closure function）と呼ばれる．基 $B \in \mathcal{B}$ に対しては，$\mathrm{cl}(B) = E$ となる．

　任意の独立集合 $I \in \mathcal{I}$ と $j \in \mathrm{cl}(I) - I$ に対して，$I \cup \{j\}$ は従属であり，サーキットを含む．さらに，(C2) より，このようなサーキットはただ一つに限る． このサーキットを基本サーキット（fundamental circuit）と呼び，$C(I|j)$ と書く． このとき，

$$C(I|j) = \{i \mid (I \cup \{j\}) - \{i\} \in \mathcal{I}\}$$

となる．

　組合せ最適化に現れるマトロイドの代表的な例を以下に挙げる．

2 値マトロイド 位数 2 の有限体 GF(2) 上で線形表現可能なマトロイドを 2 値マトロイド（binary matroid）と呼ぶ．特に，3×7 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で表現されるマトロイドは，Fano マトロイドと呼ばれ，F_7 と書かれる．

グラフ的マトロイド 点集合 W，枝集合 E をもつ無向グラフ $G = (W, E)$ を考える．枝集合の部分集合のうち，閉路を含まないものの全体を $\mathcal{I}$ とすると，$\mathbf{M}(G) = (E, \mathcal{I})$ は (I0)–(I2) を満たし，マトロイドになる．このようにして得ることのできるマトロイドをグラフ的マトロイド（graphic matroid）と呼ぶ．グラフ的マトロイドは，接続行列を用いて GF(2) 上で線形表現される 2 値マトロイドになっている．

横断マトロイド 点集合 E, F，枝集合 A からなる 2 部グラフ $G = (E, F; A)$ を考える．端点を共有しない枝部分集合をマッチングという． 点集合 E の部分集合で，マッチングの E における端点集合となり得るものの全体を $\mathcal{I}$ とする．このとき，$(E, \mathcal{I})$ は (I0)–(I2) を満たし，マトロイドになる．こうして得られるマトロイド $(E, \mathcal{I})$ を横断マトロイド（transversal matroid）と呼ぶ.

分割マトロイド 有限集合 E を互いに素な部分集合 $E_1, \ldots, E_k$ に分割し，非負整数 $r_1, \ldots, r_k$ を定める．各成分 E_i に対して $|I \cap E_i| \leq r_i$ を満たす $I \subseteq E$ の全体 $\mathcal{I}$ を独立集合族とするマトロイド $(E, \mathcal{I})$ を分割マトロイド（partition matroid）という.

一様マトロイド 有限集合 E の部分集合で，要素数が r 以下のものの全体を独立集合族とするマトロイドを一様マトロイド（uniform matroid）と呼び，$n = |E|$ を用いて，$\mathrm{U}_{n,r}$ と書く．特に $n = r$ の場合は，自由マトロイド（free matroid）と呼ばれる．一様マトロイド $\mathrm{U}_{n,r}$ は，完全 2 部グラフ $K_{n,r}$ に関する横断マトロイドになっている.

5-1-2 貪欲アルゴリズム

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ の各要素 $e \in E$ に重み $w(e)$ が与えられているとしよう． このとき，重み最小の基，すなわち，$w(B) = \sum_{e \in B} w(e)$ を最小にする基 $B \in \mathcal{B}$ を求めることを考える．このようなマトロイド上の最適化問題を考える際には，マトロイドがどのようなかたちで与えられるかについて，注意を払う必要がある．通常は，部分集合が独立かどうかを効率的に判定するオラクル（oracle）が用意されていると想定するのが一般的である.

最小重みの基を見出すには，各要素を重みの小さい順にもってきて，独立性を壊さない範囲で，付け加えていけばよい．初期解として，$I := \emptyset$ を採用し，$S := E$ とする．続いて，S のなかから重み最小の要素 j を削除する．もし $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$ であれば，$I := I \cup \{j\}$ とする．以上の操作を，集合 S が空集合となるまで繰り返す．アルゴリズム終了時の I が最小重みの基となる．このアルゴリズムは，貪欲アルゴリズム（greedy algorithm）と呼ばれている.

階数 r のマトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ と自然数 $k \leq r$ に対して，

$$\mathcal{I}^{(k)} = \{I \mid |I| \leq k,\ I \in \mathcal{I}\}$$

とすると，$(E, \mathcal{I}^{(k)})$ もマトロイドになる． このようにして得られるマトロイドを $\mathbf{M}$ の打ち切り（truncation）という．貪欲アルゴリズムの途中で現れる I は，$\mathbf{M}$ の打ち切りにおける最小重みの基，すなわち，$\mathbf{M}$ の独立集合で，同じ要素数のもののうちで最小重みのものになっている.

ここでは，重みの最小化について述べたが，全く同様のアルゴリズムによって，重みの最

大化も可能であることに注意する．

有限集合 E における実数値関数 $x : E \to \mathbf{R}$ の全体を $\mathbf{R}^E$ と書くと，$\mathbf{R}^E$ は $n = |E|$ 次元の線形空間となる．任意の $x \in \mathbf{R}^E$ と $Y \subseteq E$ に対して，$x(Y) = \sum_{e \in Y} x(e)$ と定める．部分集合 $Y \subseteq E$ に対して，$e \in Y$ ならば $\chi_Y(e) = 1$ で，$e \in E - Y$ ならば $\chi_Y(e) = 0$ とすることで定まる $\chi_Y \in \mathbf{R}^E$ を Y の特性ベクトルという．

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ に対して，独立集合の特性ベクトル全体の凸包 $\mathrm{conv}\{\chi_I \mid I \in \mathcal{I}\}$ を $\mathbf{M}$ のマトロイド多面体（matroid polytope）と呼ぶ．同様に，基の特性ベクトル全体の凸包 $\mathrm{conv}\{\chi_B \mid B \in \mathcal{B}\}$ を $\mathbf{M}$ の基多面体（base polytope）と呼ぶ．マトロイド多面体と基多面体は，階数関数 ρ を用いて，それぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(\rho) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}^E,\ \forall Y \subseteq E : x(Y) \leq \rho(Y),\ \forall e \in E : x(e) \geq 0\}, \\ \mathrm{B}(\rho) &= \{x \mid x \in \mathrm{M}(\rho), x(E) = \rho(E)\} \end{aligned}$$

と記述される．最小重み基を求める問題は，$\mathrm{B}(\rho)$ における線形計画問題になっている．

5-1-3 双対マトロイド

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ の基族 $\mathcal{B}$ に対して，

$$\mathcal{B}^* = \{E - B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

とすると，$\mathcal{B}^*$ も (B0)–(B1) を満たす．すなわち，$\mathcal{B}^*$ を基族とする E 上のマトロイド $\mathbf{M}^*$ が定まる．このマトロイド $\mathbf{M}^*$ を $\mathbf{M}$ の双対マトロイド（dual matroid）と呼ぶ．双対マトロイド $\mathbf{M}^*$ の階数関数 ρ^* は，$\mathbf{M}$ の階数関数 ρ を用いて，

$$\rho^*(X) = |X| + \rho(E - X) - \rho(E)$$

と表される．

行列的マトロイドの双対マトロイドは，行列的マトロイドになる．すなわち，マトロイドが行列的であるという性質は，双対に関して閉じている．これに対し，グラフ的マトロイドや横断マトロイドは，双対に関して閉じていない．グラフ的マトロイド $\mathbf{M}(G)$ の双対マトロイド $\mathbf{M}^*(G)$ は，グラフ G が平面的であるとき，かつそのときに限って，グラフ的になる．平面グラフ G に対するマトロイド $\mathbf{M}(G)$ の双対マトロイドは，双対グラフ G^* に対するマトロイド $\mathbf{M}(G^*)$ に一致する．このように，双対マトロイドの概念は，双対グラフの一般化になっている．

双対マトロイド $\mathbf{M}^*$ におけるサーキット C^* を，$\mathbf{M}$ のコサーキット（cocircuit）と呼ぶ．グラフ的マトロイドのコサーキットはグラフのカットセットに対応している．定義から明らかなように，コサーキットはすべての基と空でない交わりをもっている．

任意の基 $B \in \mathcal{B}$ とその要素 $b \in B$ に対して，$C^* \cap B = \{b\}$ となるコサーキットが一意に存在する．このコサーキットを B と b に関する基本コサーキットと呼び，$C^*(B|b)$ と書く．基本コサーキットは，

$$C^*(B|b) = \{e \mid (B - \{b\}) \cup \{e\} \in \mathcal{B}\}$$

と特徴づけられる．

マトロイド $\mathbf{M}$ の任意のサーキット C と任意のコサーキット C^* に対して，$|C \cap C^*| \neq 1$ となる．このことから，相異なる $B, B' \in \mathcal{B}$ と任意の $b \in B \setminus B'$ に対して，$|C^*(B|b) \cap C(B'|b)| > 1$ となり，以下の (B1*) が成立する．

(B1*) $B, B' \in \mathcal{B}, b \in B \setminus B' \Rightarrow$
$\exists e \in B' \setminus B$: $(B - \{b\}) \cup \{e\} \in \mathcal{B}, (B' \cup \{b\}) - \{e\} \in \mathcal{B}.$

この性質は，同時交換性（simultaneous exchange property）と呼ばれ，マトロイドに関するアルゴリズムの設計に重要な役割を果たしている．また，同時交換性より，以下の (B1**) は，明らかであろう．

(B1)** $B, B' \in \mathcal{B}, B \neq B' \Rightarrow$
$\exists b \in B \setminus B', \exists e \in B' \setminus B$: $(B - \{b\}) \cup \{e\} \in \mathcal{B}, (B' \cup \{b\}) - \{e\} \in \mathcal{B}.$

逆に，(B0) と (B1**) を基族の公理として，マトロイドを定義することもできる．

5-1-4 マイナー

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ と部分集合 $F \subseteq E$ に対して，

$$\mathcal{I}^F = \{I \mid I \subseteq F, I \in \mathcal{I}\}$$

は，明らかに (I0)–(I2) を満たし，F を台集合とするマトロイド $(F, \mathcal{I}^F)$ を定める．このマトロイド $(F, \mathcal{I}^F)$ を，$\mathbf{M}$ の F への簡約（reduction）といい，$\mathbf{M} \cdot F$ と表す．

続いて，部分集合 $Z \subseteq E$ による縮約を考える．部分集合 $X \subseteq E - Z$ に対して，

$$\rho_Z(X) = \rho(X \cup Z) - \rho(Z)$$

とすると，関数 ρ_Z は (R0)–(R3) を満たす．すなわち，ρ_Z を階数関数とする $\overline{Z} = E - Z$ 上のマトロイドが定まる．このマトロイドを $\mathbf{M}$ の Z による縮約（contraction）と呼び，$\mathbf{M}/Z$ と表す．

簡約と縮約とは互いに双対的な関係にある．すなわち，

$$\mathbf{M}/Z = (\mathbf{M}^* \cdot \overline{Z})^*$$

が成立している．グラフ的マトロイドにおける簡約，縮約は，グラフにおける枝の開放除去，縮約除去に対応した操作である．

与えられたマトロイドに簡約と縮約とを繰り返して得られるマトロイドを $\mathbf{M}$ のマイナー（minor）と呼ぶ．マトロイドに関する様々な性質が，マイナーに関して閉じている．例えば，行列的マトロイドのマイナーは，常に行列的であるし，グラフ的マトロイドのマイナーも，常にグラフ的である．この種のマイナーを取る操作に関して閉じた性質を，それを含まないことが必要十分条件になる禁止マイナーを列挙することによって特徴づけるといった結果が沢山知られている．代表的なものを以下に挙げる．

2 値マトロイド マトロイド **M** が GF(2) 上で線形表現可能であるための必要十分条件は，**M** が一様マトロイド $\mathrm{U}_{4,2}$ をマイナーとして含まないことである．

3 値マトロイド 位数 3 の有限体 GF(3) で線形表現可能なマトロイドを 3 値マトロイド（ternary matroid）という．マトロイド **M** が 3 値マトロイドであるための必要十分条件は，**M** が一様マトロイド $\mathrm{U}_{5,2}$，その双対 $\mathrm{U}_{5,3}$，Fano マトロイド F_7，その双対 F_7^* のいずれもマイナーとして含まないことである．

正則マトロイド 任意の体上で線形表現可能なマトロイドは，正則マトロイドと呼ばれる．有限体 GF(2) 及び GF(3) 上で線形表現可能でさえあれば，正則マトロイドとなる．すなわち，**M** が正則マトロイドであるための必要十分条件は，$\mathrm{U}_{4,2}$, F_7, F_7^* のいずれもマイナーとして含まないことである．

グラフ的マトロイド 正則マトロイド **M** がグラフ的であるための必要十分条件は, **M** が $\mathbf{M}^*(K_5)$ と $\mathbf{M}^*(K_{3,3})$ のいずれもマイナーとして含まないことである．

平面マトロイド 平面グラフによって表現可能なグラフ的マトロイドを平面マトロイド（planar matroid）と呼ぶ．グラフ的マトロイド **M** が平面的であるための必要十分条件は，**M** が $\mathbf{M}(K_5)$ と $\mathbf{M}(K_{3,3})$ のいずれもマイナーとして含まないことである．

直並列マトロイド 直並列グラフによって表現可能なグラフ的マトロイドを直並列マトロイド（series-parallel matroid）と呼ぶ．2 値マトロイド **M** が直並列マトロイドであるための必要十分条件は，**M** がマイナーとして $\mathbf{M}(K_4)$ を含まないことである．

外平面マトロイド 外平面グラフによって表現可能なグラフ的マトロイドを外平面マトロイド（outerplanar matroid）と呼ぶ．2 値マトロイド **M** が外平面マトロイドであるための必要十分条件は，**M** がマイナーとして $\mathbf{M}(K_4)$ と $\mathbf{M}(K_{2,3})$ のいずれも含まないことである．

■12 群 - 2 編 - 5 章

5-2 マトロイド・インターセクション

（執筆者：岩田 覚）［2009 年 7 月 受領］

5-2-1 最大共通独立集合

台集合 E を共有するマトロイド $\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ と $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{I})$ において，共通独立集合 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ のうちで $|I|$ が最大となる最大共通独立集合を求めることを考える．

マトロイド $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ の階数関数をそれぞれ ρ_1, ρ_2 とする．このとき，任意の部分集合 $X \subseteq E$ に対して，

$$|I| = |I \cap X| + |I \setminus X| \leq \rho_1(X) + \rho_2(E - X)$$

となる．このことから，右辺の値は共通独立集合の大きさの上界を与える．更に，右辺が最小となる X に対して等号が成立し，

$$\max\{|I| : I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{\rho_1(X) + \rho_2(E - X) : X \subseteq E\} \tag{5・2}$$

のかたちの最大最小定理が得られることが，Edmonds（1970）によって示されている．

実際に最大共通独立集合を見出すには，以下のような手続きを実行すればよい．

共通独立集合 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ に付随して，点集合 E, 枝集合 $A_I = A_1 \cup A_2$ からなる有向グラフ $G_I = (E, A_I)$ を

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(u, v) \mid v \in \mathrm{cl}_1(I) - I,\ u \in C_1(I|v) - \{v\}\}, \\ A_2 &= \{(v, u) \mid v \in \mathrm{cl}_2(I) - I,\ u \in C_2(I|v) - \{v\}\} \end{aligned}$$

で定める．ただし，$\mathrm{cl}_i(\cdot), C_i(\cdot|\cdot)$ は，それぞれマトロイド $\mathbf{M}_i$ の閉包関数，基本サーキットを意味する（$i = 1, 2$）．

補助グラフ G_I 上で $S_1 = E - \mathrm{cl}_1(I)$ から $S_2 = E - \mathrm{cl}_2(I)$ に至る有向路があるならば，枝数最小の有向路を選んで，その上の点の集合を P とする．このとき，対称差 $J = I \triangle P$ は，$|J| = |I| + 1$ を満たす共通独立集合となることが保証されるので，I を J に更新する．

初期解として，$I = \emptyset$ を採用して，上記の手続きを反復すると，やがて G_I のなかに S_1 から S_2 への有向路が存在しなくなる．このとき，S_1 から到達不可能な点の集合を X とすると，$|I \cap X| = \rho_1(X)$ と $|I \setminus X| = \rho_2(E - X)$ が成立して，$|I| = \rho_1(X) + \rho_2(E - X)$ を得る．右辺が共通独立集合の大きさの上界であることから，$|I|$ が最大共通独立集合であることが保証される．

2 部グラフ $H = (V_1, V_2; E)$ の最大マッチング問題は，最大共通独立集合問題の特別な場合とみることができる．枝集合 E を，接続する V_1 の点によって分割し，各成分からたかだか 1 個を含む $I \subseteq E$ を独立集合とする分割マトロイドを $\mathbf{M}_1$ とする．同様に，V_2 の側から分割マトロイド $\mathbf{M}_2$ を定義する．このとき，$\mathbf{M}_1$ と $\mathbf{M}_2$ の共通独立集合は，H のマッチングに他ならない．最大共通独立集合を見出す上記のアルゴリズムは，2 部グラフの最大マッチングを見出すアルゴリズムの自然な一般化になっている．また，Edmonds の最大最小定理も，2 部グラフにおける最大マッチング最小被覆定理の自然な一般化とみなせる．

5-2-2 最小重み共通基

マトロイド $\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ と $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ に共通の台集合 E の各要素 $e \in E$ に重み $w(e)$ が与えられているものとする．このとき，重み最小の共通基，すなわち，$w(B) = \sum_{e \in B} w(e)$ を最小にする共通基 $B \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ を求めることを考える．ただし，$\mathcal{B}_i$ は, マトロイド $\mathbf{M}_i$ の基族を表す $(i = 1, 2)$.

共通基が存在するためには，$\rho_1(E) = \rho_2(E)$ でなければならない．更に，任意の $X \subseteq E$ に対して，$\rho_1(X) + \rho_2(E - X) \geq \rho_1(E) = \rho_2(E)$ となることが必要かつ十分である．これらの条件が成り立っていることを前提に，最小共通基を見出すアルゴリズムを記述する．

最大共通独立集合を求めた際と同様に，共通独立集合 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ に付随した補助グラフ $G_I = (E, A_I)$ を考える．各点 $e \in E$ に対して，$\ell(e)$ を

$$\ell(e) = \begin{cases} -w(e) & (e \in I) \\ w(e) & (e \in E - I) \end{cases}$$

で定める．補助グラフ G_I のなかで，S_1 から S_2 に至る有向路で長さ $\ell(P) = \sum_{e \in P} \ell(e)$ が最小の P を見出す．ただし，同じ長さの有向路が複数あるときには，そのなかで枝数が最小のものを採用する．こうして得られた P に関する対称差 $J = I \triangle P$ は，$|J| = |I| + 1$ の共通独立集合であるだけでなく，I が同じ大きさの共通独立集合のなかで最小重みを達成しているならば，J の大きさが $|I| + 1$ の共通独立集合のなかで最小重みになることが保証されるので，$I := J$ とする．初期解として，$I := \emptyset$ を採用して，上記の手続きを繰り返していくと，やがて I が共通基となる．このとき，I は共通基のなかで重みが最小になっている．

マトロイド $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ に関する基多面体 $\mathrm{B}(\rho_1), \mathrm{B}(\rho_2)$ を考えると，共通基の特性ベクトルが両者の共通部分 $\mathrm{B}(\rho_1) \cap \mathrm{B}(\rho_2)$ に含まれることは明らかである．一方で，$\mathrm{B}(\rho_1) \cap \mathrm{B}(\rho_2)$ のすべての端点は 0-1 ベクトルとなることを示すことができる．その結果，最小重み共通基問題は，$\mathrm{B}(\rho_1) \cap \mathrm{B}(\rho_2)$ に関する線形計画問題に帰着される．

最小重み共通基問題の代表的な例として，有向グラフ中で最小重みの有向全域木を求める問題が挙げられる．有向グラフ $D = (V, A)$ において，各枝 $a \in A$ に重み $w(a)$ が与えられているものとする．指定された点 $s \in V$ を根として，重み $w(T) = \sum_{a \in T} w(a)$ を最小にする有向全域木 T を見出すことを考える．そのような有向全域木が存在するためには，r から V のすべての点に到達可能でなければならない．この条件は満たされていることを前提とする．

各枝の向きを無視して得られる無向グラフで表現される A 上のグラフ的マトロイドを M_1 とする．また，A を各枝の終点によって分割して，s を終点とする枝の集合 A_s からは 0 個，ほかの各成分からはたかだか 1 個を選んでできる $I \subseteq A$ を独立集合とする分割マトロイドを $\mathbf{M}_2$ とする．このとき，$\mathbf{M}_1$ と $\mathbf{M}_2$ の共通基は，D のなかで s を根とする有向全域木にほかならない．

■12 群 - 2 編 - 5 章

5-3 劣モジュラ関数

(執筆者：岩田 覚)[2009 年 7 月 受領]

5-3-1 劣モジュラ関数と基多面体

有限集合 E における集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$ が，任意の $X, Y \subseteq E$ に対して

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \tag{5・3}$$

を満たすとき，f は劣モジュラ関数（submodular function）と呼ばれる．特に，$f(\emptyset) = 0$ となる劣モジュラ関数 f に対して，劣モジュラ多面体（submodular polyhedron）と基多面体（base polyhedron）が

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(f) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}^E,\ \forall Y : x(Y) \leq f(Y)\}, \\ \mathrm{B}(f) &= \{x \mid x \in \mathrm{P}(f), x(E) = f(E)\} \end{aligned}$$

によって定義される．

劣モジュラ多面体 $\mathrm{P}(f)$ 上で，係数ベクトル $p \in \mathbf{R}^E$ に関する線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} p(e)x(e) \\ \text{subject to} & x \in \mathrm{B}(f) \end{array}$$

の最適解を p-最大基と呼ぶ．このような p-最大基を見出すには, 以下のような貪欲アルゴリズム（greedy algorithm）を適用すればよい．まず，E の要素を $p(e_1) \geq \cdots \geq p(e_n)$ となるように番号付けして, 各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，$X_j = \{e_1, \ldots, e_j\}$ とする．更に, $x(e_j) = f(X_j) - f(X_{j-1})$ によって $x \in \mathbf{R}^E$ を定める（$X_0 = \emptyset$）．こうして得られた x は，$\mathrm{B}(f)$ の端点であり，p-最大基となる．

5-3-2 劣モジュラ関数の最小化

劣モジュラ関数は，凸関数の離散版に当たることが，Lovász（1983）によって明らかにされた．非負ベクトル $p \in \mathbf{R}^E$ に対して，各成分 $p(e)$ の取る相異なる値を $p_1 > \cdots > p_k$ とし，$Y_i = \{e \mid p(e) \geq p_i\}$ と定めると，非負実数の列 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ が一意に存在して，

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{Y_i}$$

と表現できる．このときの右辺の係数を用いて，$f(\emptyset) = 0$ を満たす任意の集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$ に対して，関数 $\widehat{f} : \mathbf{R}^E \to \mathbf{R}$ を

$$\widehat{f}(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(Y_i)$$

で定義する．ここで，$\widehat{f}$ が正斉次的であること，すなわち任意の $\kappa > 0$ に対して $\widehat{f}(\kappa p) = \kappa \widehat{f}(p)$

が成立することに注意する．関数 f が劣モジュラ関数のとき，かつそのときに限り，$\widehat{f}$ は凸関数となる．

定義から明らかなように，単位立方体 $Q = \{p \mid p \in \mathbf{R}^E, \forall e \in E : 0 \leq p(e) \leq 1\}$ における $\widehat{f}$ の最小値は，端点で達成される．したがって，劣モジュラ関数 f の最小値を求めるには，$\widehat{f}$ の Q における最小化を行えばよい．これは，$\widehat{f}$ の凸性より，楕円体法を用いて，多項式時間で実行可能である．Grötschel–Lovász–Schrijver [5] は，より精密な理論を展開して，劣モジュラ関数の最小化を強多項式時間，すなわち f の値によらない $n = |E|$ のみの多項式時間で行うアルゴリズムを示している．しかし，楕円体法は収束が遅く，多項式時間とはいうものの効率的な解法とは言いにくい．

一方，Fujishige [6] は，基多面体における最小ノルム点，すなわち原点からの Euclid 距離が最小の基を求めることによって，劣モジュラ関数を最小化するアルゴリズムを示している．この方法は，多項式計算時間の保証はないものの，実際には速く，いわば線形計画法における単体法に相当する．

実際に高速な多項式時間アルゴリズムを開発するには，組合せ的なアルゴリズムが望まれる．この方向では，Cunningham（1985）が擬多項式時間，すなわち f の関数値の大きさと n の多項式時間で整数値劣モジュラ関数を最小化するアルゴリズムを開発した．ここでは，

$$\min\{f(X) \mid X \subseteq E\} = \max\{x(E) \mid x \in \mathrm{P}(f),\ x \leq 0\}$$

のかたちの最大最小定理が本質的な役割を果たしている．Cunningham の手法を発展させることによって，現在では組合せ的な強多項式時間アルゴリズムが得られている．

5-3-3 対称劣モジュラ関数

集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$ が，任意の $X \subseteq E$ に対して $f(X) = f(E - X)$ を満たすとき，f は対称であるといわれる．対称劣モジュラ関数（symmetric submodular function）については，Queyranne（1998）が，無向グラフの最小カットを求める Nagamochi–Ibaraki（1992）のアルゴリズムを拡張することによって，空でない真部分集合に関する最小値を見出す組合せ的な強多項式時間アルゴリズムを示している．

■参考文献

1) M. Iri, “Applications of matroid theory, *Mathematical Programming — The State of the Art*,” Springer-Verlag, pp.158-201,1983.
2) A. Recski, “*Matroid Theory and Its Applications in Electric Network Theory and in Statics*,” Springer-Verlag, 1989.
3) K. Murota, “*Matrices and Matroids for Systems Analysis*,” Springer-Verlag, 2000.
4) J. Oxley, “*Matroid Theory*,” Oxford University Press, 1992.
5) M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver, “*Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*,” 2nd ed., Springer-Verlag, 1993.
6) S. Fujishige, “*Submodular Functions and Optimization*,” 2nd ed., Elsevier, 2005.

