■12 群（電子情報通信基礎）－ 2 編（離散数学）

7 章　数理論理学

（執筆者：西崎真也）［2009 年 8 月 受領］

■概要■

論理学（logic）とは，言明から言明を導く推論を研究する学問であり，数理論理学（mathematical logic）は，数学的言明と推論を数学的手法により研究する論理学及び数学の一分野である．数理論理学は情報科学・情報工学の分野において重要な役割を果してきた．「論理回路」という用語にも見られるとおり，古くはハードウェアの分野の理論として用いられ，その後，プログラミング言語の理論や形式的手法などのソフトウェアの分野においても応用範囲を広げてきた．

数理論理学はその表現力や表現対象に応じて数多くの体系が考案されている．ここでは，命題論理，一階述語論理，様相論理，時相論理という 4 種の体系を紹介する．

いずれにおいても，構文論，意味論，演繹体系という三つの側面をもつ．構文論では，言明を記号列としてどのように表現するのかを定める．意味論では，構文で記号的に定式化された言明に対し数学的に正しいということを定義する．そして演繹体系では，正しい言明を導く過程を定式化する．

【本章の構成】

本章では命題論理（7-1 節）について，構文論と意味論を解説したのち，演繹体系として，ヒルベルト流の演繹体系，シーケント計算，自然演繹を紹介する．そして，述語論理（7-2 節）についても同様に構文論と意味論を説明した後に，各演繹体系について説明する．次に様相論理（7-3 節）については構文論と，クリプキ構造に基づく意味論，そして演繹体系についてはヒルベルト流の演繹体系に触れる．最後に様相論理の一種である時相論理（7-4 節）について，分岐時間時相論理と線形時間時相論理について，その構文論と意味論を紹介する．

　　

■12 群 - 2 編 - 7 章

7-1 命題論理

（執筆者：西崎真也）［2009 年 8 月 受領］

命題（proposition）とは，真か偽かを議論の対象とすることができるような言明である．「$1+2=3$」や「8 は 2 の倍数である」という言明は命題であるし，「$2\times 2<0$」というように正しくない言明も命題である．「どうしてあなたはロミオなの？」というのは，真か偽かを議論の対象とすることはできないので，命題ではない．

命題は命題どうしを組み合わせて作ることがある．例えば，「$x>0$ かつ $x^2<2$」という命題は，「$x>0$」という命題と，「$x^2<2$」という命題を組み合わせたものである．ここで用いた「かつ」のほか，「または」や「ならば」というような命題どうしを結びつけて命題を構成するものを論理結合子と呼ぶ．本節で紹介する命題論理（propositional logic）は，原子命題と論理結合子から構成される命題について研究する論理体系である．

7-1-1 命題論理の構文論

命題記号（proposition symbol）と呼ばれる可算無限個の記号があらかじめ与えられている．命題記号全体の集合を $\mathbb{P}$ と表す．そのうちに特に二個 $\top$ と $\bot$ という記号が含まれているとする．この二つは真偽値を表すために用いられる．命題記号は，P, Q などで表す．そして，命題論理の命題は以下のような規則により定義される．命題は A, B などで表す．(i) 命題記号 P は命題である．(ii) $\top$ は命題である．(iii) $\bot$ は命題である．(iv) A, B が命題ならば，$(A\wedge B)$ は命題である．(v) A, B が命題ならば，$(A\vee B)$ は命題である．(vi) A, B が命題ならば，$(A\Rightarrow B)$ は命題である．(vii) A, B が命題ならば，$(A\Leftrightarrow B)$ は命題である．(viii) A が命題ならば，$(\neg A)$ は命題である．

(iv),(v),(vi),(vii),(viii) で定義される命題を各々，連言（conjunction），選言（disjunction），含意（implication），同値（identity），否定（negation）と呼ぶ．五つの記号 $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ は論理結合子（logical connective）と呼ばれ，数式と同様に，読みやすくするために括弧の省略が行われる．結合力は $\neg$ が最強とし，$\wedge,\vee,\Rightarrow$ の順になっていて，$\wedge,\vee$ は左に結合的で，$\Rightarrow$ は右に結合的とする．

7-1-2 命題論理の意味論

意味論（semantics）は，単なる記号の羅列である命題に対して，意味を与える．命題の意味としては，それが真であるか偽であるかということになり，命題に現れる命題記号をそれぞれ真とするか偽とするかにより定まる．数理論理学では，意味論は数学的に定義される．真を整数 1 で表し，偽を 0 で表すこととし，この二つからなる集合を $\mathbb{B}$ とする．各命題記号を真とするか偽とするのかを定める定め方を，$\mathbb{P}$ から $\mathbb{B}$ への関数，例えば，$I:\mathbb{P}\to\mathbb{B}$ により定式化する．このような関数は解釈（interpretation）と呼ばれる．命題の意味を定める関数 $[\![-]\!]_I$ は，命題記号の解釈 I の拡張として次のように定義され，これもまた解釈と呼ばれる．(i) $[\![\top]\!]_I=1$, (ii) $[\![\bot]\!]_I=0$, (iii) $[\![P]\!]_I=I(P)$, (iv) $[\![(\neg A)]\!]_I=1-[\![A]\!]_I$, (v) $[\![(A\wedge B)]\!]_I=[\![A]\!]_I\cdot[\![B]\!]_I$, (vi) $[\![(A\vee B)]\!]_I=[\![A]\!]_I+[\![B]\!]_I-[\![A]\!]_I\cdot[\![B]\!]_I$, (vii) $[\![(A\Rightarrow B)]\!]_I=1-[\![A]\!]_I+[\![A]\!]_I\cdot[\![B]\!]_I$, (viii) $[\![(A\Leftrightarrow B)]\!]_I=1-|[\![A]\!]_I-[\![B]\!]_I|$

「A も B も両方が真であるとき，そのときに限り，A かつ B は真である」というのが，「か

つ（∧）」という言葉が数学で用いられるときの意味である．これを数学的に定式化したのが上記の定義の (v) となる．$\vee$ は「または（or）」，$\neg$ は「でない（not）」，$\Rightarrow$ は「ならば」，$\Leftrightarrow$ は「ならば，かつ，そのときに限り（if and only if）」を定式化したものとなっている．

以下では Δ や Γ は命題の集合を表すこととする．$\Delta \models A$ とは，Δ の各要素 B に対して $[\![B]\!]_I = 1$ であるような任意の解釈 I において，$[\![A]\!]_I = 1$ が成り立つことをいう．命題 A が恒真（valid）であるとは，$\emptyset \models A$, すなわち，任意の解釈 I のもとで $[\![A]\!]_I = 1$ であることをいい，$\models A$ と書く．恒真な命題はトートロジー（tautology）とも呼ばれる．命題 A が充足可能（satisfiable）であるとは，$[\![A]\!]_I = 1$ が成り立つような解釈 I が存在することをいう．A が充足不能（unsatisfiable）とは，A が充足可能でないことをいう．A が充足不能であることと，$(\neg A)$ が恒真であることは同値である．

$\vee$ と $\neg$ によってほかの論理結合子 $\wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ は略記として表すことができることが知られている．例えば，任意の I に対して，$[\![(A \Rightarrow B)]\!]_I = [\![(\neg A \vee B)]\!]_I$ が成り立つ．更に，一般的に，このような 2 引数の論理結合子のほか，n 引数であってもすべての論理結合子は，$\vee$ と $\neg$ を組合せれば表現することができ，$\{\vee, \neg\}$ は関数的に完全である（functionally complete）という．このほかにも例えば，$\{\wedge, \neg\}$ なども関数的に完全である．

7-1-3 命題論理の演繹体系

意味論は，正しさという概念を数学的に定式化したものであった．演繹体系（deductive system）は，正しさを導く過程を数学的に定式化した体系である．正しさを導く過程が，いわゆる，証明（proof）であり，導かれた結果が定理（theorem）である．演繹体系は証明体系（proof system）とも呼ばれることがある．公理（axiom）といわれる命題から始まって，推論規則を有限回適用して得られる命題 A は証明可能であると呼ばれ，$\vdash A$ と書く．証明可能である命題は定理とも呼ばれる．

演繹体系には，(1) ヒルベルト流の演繹体系，(2) 自然演繹, (3) シーケント計算の三種類がよく知られている．

（1）ヒルベルト流の演繹体系

ヒルベルト流の演繹体系（Hilbert-style deduction system）は，ヒルベルト体系（Hilbert system），ヒルベルト計算（Hilbert calculus），ヒルベルト・アッカーマン体系（Hilbert-Ackermann system）とも呼ばれる．

推論規則は, 三段論法（modus pones）と呼ばれる「A と $A \Rightarrow B$ から B を導く」という規則だけである．公理には次のようなものがある．(i) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, (ii) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$, (iii) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B))$, (iv) $A \wedge B \Rightarrow A$, (v) $A \wedge B \Rightarrow B$, (vi) $A \Rightarrow A \vee B$, (vii) $B \Rightarrow A \vee B$, (viii) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$, (ix) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

$A \Leftrightarrow B$ は $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ の略記とし，$\top, \bot$ は各々，適当な命題記号 P に対して $P \vee \neg P$, $P \wedge \neg P$ の略記とする．

公理と推論規則（三段論法）を用いて導かれる命題 A を定理という．このとき，A は証明可能（provable）であるといい，$\vdash A$ と書く．

公理と命題の集合 Γ と推論規則を用いて A が導かれるとき，$\Gamma \vdash A$ と書かれる．

次の性質は演繹定理（deduction theorem）と呼ばれるものである．

$\Gamma, A \vdash B$ ならば，$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ である．

命題が証明可能であるならば恒真であるという性質は健全性（soundness）と呼ばれ，「$\vdash A$ ならば，$\models A$ である」という性質である．この逆は完全性（completeness）と呼ばれ，「$\models A$ ならば，$\vdash A$ である」という性質である．

（2）シーケント計算

シーケント計算は，シーケント（sequent）と呼ばれる式を導く体系となっている．シーケントは 0 個以上の有限個の命題の列であり，$A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$（ただし，$m \geq 0, n \geq 0$）というかたちをしている．このシーケントは，意味論的には，$A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \Rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_n$ という命題に対応している．命題 A が証明可能であることは，$\to A$ が導かれることに相当する．公理は，$P_1, \ldots, P_m \to Q_1, \ldots, Q_n$（$P_i = Q_j$ をみたす i, j が存在する）というかたちの，初期シーケントと呼ばれるものである．推論規則は次のように横線を用いて書かれる．横線の上が前提であり，下が結論となっている．前提にある命題から結論の命題が導かれることを表している．

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma' \to \Delta'}\ \text{交換} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta,\ A \quad A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}\ \text{カット}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta,\ A}\ \text{水増し右} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{A,\ \Gamma \to \Delta}\ \text{水増し左}$$

$$\frac{A,\ \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}\ \neg\text{右} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta,\ A}{\neg A,\ \Gamma \to \Delta}\ \neg\text{左}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ A \quad \Gamma \to \Delta,\ B}{\Gamma \to \Delta,\ A \wedge B}\ \wedge\text{右} \qquad \frac{A,\ B,\ \Gamma \to \Delta}{A \wedge B,\ \Gamma \to \Delta}\ \wedge\text{左}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ A,\ B}{\Gamma \to \Delta,\ A \vee B}\ \vee\text{右} \qquad \frac{A,\ \Gamma \to \Delta \quad B,\ \Gamma \to \Delta}{A \vee B,\ \Gamma \to \Delta}\ \vee\text{左}$$

$$\frac{A,\ \Gamma \to \Delta,\ B}{\Gamma \to \Delta,\ A \Rightarrow B}\ \Rightarrow \text{右} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta,\ A \quad B,\ \Gamma \to \Delta}{A \Rightarrow B,\ \Gamma \to \Delta}\ \Rightarrow \text{左}$$

ただし，Γ', Δ' は各々，Γ, Δ を並び換えたもの．

この体系において，推論規則のうち，水増し左，水増し右，カットは冗長である．すなわち，この三つの規則がなくても，証明可能であるシーケントは減ることも増えることもない．特に，カットについてはカット除去定理（cut-elimination theorem）と呼ばれ，次のような性質である．

シーケント $\Gamma \to \Delta$ が推論規則カットを用いて導かれるならば，このシーケントをカットを用いないで導くことができる．

シーケント計算においても健全性と完全性が成り立つ．すなわち，$\to A$ が導かれることと，$\models A$ であることは必要十分条件である．

（3）自然演繹

自然演繹（natural deduction）も演繹体系の一つである．仮定（hypothesis）と呼ばれる命題に対して，推論規則を適用し，定理を導く．そして，ヒルベルト流の演繹体系と異なり，公理はなく，各論理結合子に対して，導入規則・除去規則と呼ばれる一対の推論規則が与えら

れているのが特徴である．以下は推論規則の抜粋である．

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\text{導入} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\text{消去 (左)} \qquad \frac{A \quad B}{B}\ \wedge\text{導入 (右)}$$

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\ \Rightarrow\text{消去} \qquad \frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\ \Rightarrow\text{導入} \qquad \frac{\perp}{A}\ \perp \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{A}\ \text{背理法}$$

推論規則「⇒ 導入」は，A を仮定して B を導く証明があるならば，$A \Rightarrow B$ を導く証明を得ることができることを示している．ただ，この $A \Rightarrow B$ を導く証明においては，A は既に証明の仮定ではない．そのことを表すのが「[A]」の角括弧であり，仮定の消去（discharge）と呼ばれる操作である．通常の数学的な推論を自然に形式化したものであるので分かりやすいが，証明を数学的対象として扱うと，否定や仮定の操作のために，複雑なものとなってしまう．シーケント計算は，このような自然演繹の欠点の改良として考案された．仮定 $A_1, \ldots, A_n$ から B が導かれることを，$A_1, \ldots, A_n \vdash B$ と書く．特に仮定無しで B が導かれることを「B は証明可能である」といい，$\vdash B$ と書く．自然演繹においても，健全性と完全性が成り立つ．

■12 群 - 2 編 - 7 章

7-2 一階述語論理

(執筆者：西崎真也)[2009 年 8 月 受領]

命題論理の命題では，命題記号を論理結合子によりつなげたものとなっていた．一階述語論理(first-order predicate logic)では，原子論理式(atomic formula)を論理結合子によりつなげていくのだが，原子論理式は命題記号とは異なり，「…が～である」というような述語を含む言明を形式化したものとなっている．

7-2-1 一階述語論理の構文論

一階述語論理の構文は項(term)と呼ばれるものと，論理式(formula)と呼ばれるものからなる．これらの構文を定義するのに先立って，可算無限個の個体変数(individual variable)と呼ばれる記号と，定数記号(constant symbol)と関数記号(function symbol)と述語記号(predicate symbol)が与えられるものとする．個体変数は単に変数(variable)と呼ぶこともある．定数記号，関数記号，述語記号としてそれぞれどのようなものが与えられるのかということを表す概念が，シグナチャ(signature)である．シミラリティタイプ(similarity type)と呼ぶこともある．シグナチャは，述語記号の集合 $Pred$, 関数記号の集合 $Func$, 定数記号の集合 $Const$ の三つの集合の組($Pred, Func, Const$)として与えられる．これらの各記号にはアリティ(arity)という非負整数が割り当てられている．述語記号 p のアリティは $arity(p)(\geq 0)$ と表し，関数記号 f のアリティは $arity(f)(\geq 1)$ と表す．関数記号のアリティは 1 以上とする．アリティ 0 であるような関数記号を定数記号として定義するやり方もあるのだが，本稿では関数記号と定数記号は分けておくこととする．また，アリティ 0 であるような述語記号を命題記号として述語記号とは別物であるとするやり方もあるが，本稿では，命題記号は述語記号の一種であると考えるものとする．

項は，以下のような規則により定義される．(i) 個体変数 x は項である．(ii) 定数記号 c は項である．(iii) f がアリティが m である関数記号であり，$t_1, \ldots, t_m$ が項であるならば，$f(t_1, \ldots, t_m)$ は項である．

論理式は，以下のような規則により定義される．(i) p がアリティが n である述語記号であり，$t_1, \ldots, t_n$ が項であるならば，$p(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式である．(ii) $\top$ は論理式である．(iii) $\perp$ は論理式である．(iv) A, B が論理式ならば，$(A \land B)$ は論理式である．(v) A, B が論理式ならば，$(A \lor B)$ は論理式である．(vi) A, B が論理式ならば，$(A \Rightarrow B)$ は論理式である．(vii) A, B が論理式ならば，$(A \Leftrightarrow B)$ は論理式である．(viii) A が論理式ならば，$(\neg A)$ は論理式である．(ix) A が論理式ならば，$\forall x A$ は論理式である．(x) A が論理式ならば，$\exists x A$ は論理式である．

このように定義された項の集合と論理式の集合とをあわせて，一階述語論理の言語(language)と呼ぶ．

∀ は全称記号または普遍量化子(universal quantifier)と呼ばれる．∃ は存在記号または存在量化子(existential quantifier)と呼ばれる．この二つをあわせて，量化子(quantifier)，もしくは，量化記号，限定子と呼ばれる．

(i),(ii),(iii) で定義される論理式を原子論理式と呼び，P, Q などで表す．(i) をアリティ 0 の場合に制限し，(ix),(x) を除けば，命題論理となる．

定数記号として $\overline{0}, \overline{1}$, 関数記号として $\overline{+}, \overline{\times}$(アリティ 2), 述語記号として=,¡とからなるシグ

ナチャから定義される言語の論理式としては，例えば, $(\forall y\ x \mp y = y) \wedge (\forall y\ z \overline{\times} y = z)$ がある．

論理式 $\forall x \exists y\ p(x) \wedge q(y)$ の一つ目の x と二つ目の x は変数としては同じ x である．ただ，現れている場所が違う．二つの x を区別するために，変数の出現という言葉を用いる．一つ目の変数の出現は，$\forall x$ の x であり，二つ目の変数の出現は，$p(x)$ の x である．

量化子 $\forall x$ や $\exists x$ は，$\sum_{i=0}^{10} 1/i^2$ における，$\sum_{i=0}^{10} \cdots$ に似ている．数学的には，$\sum_{i=0}^{10} 1/i^2$ と $\sum_{j=0}^{10} 1/j^2$ とは同じものを意味する．これと同様に，$\forall x \exists y\ p(x) \wedge q(y)$ と $\forall z \exists y\ p(z) \wedge q(y)$ とは同じものとみなし，この関係を α 同値と呼ぶ．α 同値な論理式は記号列として同一視する．

総和記号 $\sum_{i=0}^{10}$ の下の変数 i は，後に現れる $1/i^2$ に現れている変数 i に結び付いている．このような結び付きを変数の束縛（binding）と呼ぶ．$\forall xA$ や $\exists xA$ における，量化子 $\forall x$ や $\exists x$ も同様であり，それに続く論理式 A に現れる変数 x の出現は量化子により束縛されているという．例えば，$\forall x\ p(x) \wedge q(y)$ において，$p(x)$ の x の出現は $\forall x$ により束縛された出現（bound occurrence）と呼び，$\forall x$ の x の出現を，束縛する出現（binding occurrence）と呼ぶ．一方，$q(y)$ の y は自由な出現（free occurrence）と呼ぶ．論理式 A における自由な x の出現をすべて項 t に置き換えた論理式を $A[t/x]$ とか $A[x{:=}t]$ と書く．この操作を代入と呼ぶ．また，自由な x の出現を含みうる論理式 A を $A[x]$ や $A(x)$ と書き，$A[t]$ とか $A(t)$ と書くことにより，$A[t/x]$ を表すこともある．自由な変数の出現を含まない論理式を閉じた論理式と呼ぶ．

7-2-2 一階述語論理の意味論

命題論理において命題の意味は，命題記号の解釈（interpretation）を一つ定めると定まった．これに対して，一階述語論理において，閉じた論理式の意味は，述語記号，定数記号，関数記号の解釈を一つ定めると定まる．この三種の記号の解釈と領域（universe）と呼ばれる集合をまとめて，構造（structure）と呼ぶ．領域とは，個体変数や定数記号が示す意味を表現するものの集合である．構造と領域は次のように定義される．構造は，空でない集合 U と次のような三つの関数 I_p, I_f, I_c の組 (U, I_p, I_f, I_c) である．アリティ n の各述語記号 q に対し，$I_p(q) : U^n \to \mathbb{B}$ となる．アリティ n の各関数記号 g に対し，$I_f(g) : U^n \to U$ となる．各定数記号 d に対して，$I_c(d) \in U$ となる．関数 I_p, I_f, I_c を各々，述語記号の解釈，関数記号の解釈，定数記号の解釈と呼ぶ．ただ，混乱が生じない限りこの三つを単に I と書き，構造も単に (U, I) と書く．更に省略して単に I と書くこともある．構造は，述語記号・関数記号・定数記号に何を想定しているのかに依存している．言い換えると，シグナチャを定めてはじめて，構造は定まるのである．

各個体変数全体の集合から領域への関数を付値（valuation）と呼び，自由な変数の出現を含む論理式 A において，それらの変数がどういうものを指すのかを表すために用いられる．

項 t 及び論理式 A の解釈は，構造 (U, I) と，付値 J を与えると定まり，各々 $[\![t]\!]_{I,J}, [\![A]\!]_{I,J}$ と書く．これらは以下により帰納的に定義される．(i)$[\![x]\!]_{I,J} = J(x)$, (ii)$[\![f(t_1, \ldots, t_m)]\!]_{I,J} = I(f)([\![t_1]\!]_{I,J}, \ldots, [\![t_m]\!]_{I,J})$, (iii)$[\![\top]\!]_{I,J} = 1$, (iv) $[\![\bot]\!]_{I,J} = 0$, (v)$[\![(\neg A)]\!]_{I,J} = 1 - [\![A]\!]_{I,J}$, (vi)$[\![(A \wedge B]\!]_{I,J} = [\![A]\!]_{I,J} \cdot [\![B]\!]_{I,J}$, (vii)$[\![(A \vee B)]\!]_{I,J} = [\![A]\!]_{I,J} + [\![B]\!]_{I,J} - [\![A]\!]_{I,J} \cdot [\![B]\!]_{I,J}$, (viii)$[\![(A \Rightarrow B)]\!]_{I,J} = 1 - [\![A]\!]_{I,J} + [\![A]\!]_{I,J} \cdot [\![B]\!]_{I,J}$, (ix)$[\![(A \Leftrightarrow B)]\!]_{I,J} = 1 - |[\![A]\!]_{I,J} - [\![B]\!]_{I,J}|$, (x)$[\![\forall xA]\!]_{I,J} = 1$ となるのは，任意の $u \in U$ に対して $[\![A]\!]_{I,J[x \mapsto u]} = 1$ となるとき，またそのときに限る, (xi)$[\![\exists xA]\!]_{I,J} = 1$ となるのはある $u \in U$ に対して $[\![A]\!]_{I,J[x \mapsto u]} = 1$ となるとき，またそのときに限る．$J[x \mapsto u]$ とは $J[x \mapsto u](x) = u$ であり，x 以外の変数 y に対しては $J[x \mapsto u](y) = J(y)$ であるような

関数を表す．

定数記号 $\overline{0}, \overline{1}$, 関数記号 $\overline{+}, \overline{\times}$（アリティ 2）, 述語記号 $=, <$ というシグナチャに対応する構造として，例えば，$(\mathbb{R}, I)$ が考えられる．ただし，ここで I は次のように定義されたものである．$I(=)(u, v) = 1$ となるのは，u と v とが等しい，かつそのときに限る．$I(<)(u, v) = 1$ となるのは，u が v 未満であり，かつそのときに限る．$I(\overline{+})(u, v) = u + v, I(\overline{\times})(u, v) = uv, I(\overline{0}) = 0$.

任意の構造 (U, I) と，任意の付値 J に対して，$[\![A]\!]_{I,J} = 1$ であるとき，論理式 A は恒真（valid）であるといい，$\models A$ と書く．$[\![A]\!]_{I,J} = 1$ となるような構造 (U, I) と付値 J が存在するとき，論理式 A は充足可能（satisfiable）であるという．充足可能でないことを充足不能（unsatisfiable）という．論理式の集合 Γ が充足可能であるとは，構造 (U, I) と付値 J が存在して，任意の $A \in \Gamma$ に対して，$[\![A]\!]_{I,J} = 1$ となることをいう．Γ が充足可能でないとき，充足不能という．

構造 (U, I) のもとで，任意の付値 J に対して，$[\![A]\!]_{I,J} = 1$ となるとき，(U, I) は A のモデル（model）であるという．前述の構造 $(\mathbb{R}, I)$ は，$\exists x \forall y((\forall z\, z \overline{\times} y = z) \Rightarrow (x \overline{\times} x = y \overline{+} y))$ という論理式のモデルとなっている． $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ が変数 x にあてはまる値であるので，領域を実数体 $\mathbb{R}$ ではなく，有理数体 $\mathbb{Q}$ に替えると，モデルではなくなってしまう．

論理式 A, B が論理同値であるとは，任意の構造 (U, I) と任意の付値 J に対して，$[\![A]\!]_{I,J} = [\![B]\!]_{I,J}$ が成り立つことをいい，$\models A \Leftrightarrow B$ にほかならない．

次の性質は, エルブラン (Herbrand) の定理と呼ばれる．$\forall x_1 \cdots \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n]$ が充足不能ならば, 閉じた項 $t_{ij} (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ が存在して, $A[t_{11}, \ldots, t_{1n}] \wedge \cdots \wedge A[t_{m1}, \ldots, t_{mn}]$ が充足不能になる．ただし，$A[x_1, \ldots, x_n]$ は，量化子を含まない論理式である．この定理は, 一階述語論理の充足不能性を限られた範囲ではあるものの，命題論理の充足不能性に帰着させる性質であるといえる．

ほかの重要な性質として次のコンパクト性がある．論理式の集合 Γ が充足不能であるならば，Γ の有限部分集合 Δ が存在して，Δ は充足不能となる．

7-2-3 一階述語論理の演繹体系

一階述語論理の演繹体系（deduction system）は，命題論理で紹介した諸体系を拡張したものとなっている．

(1) ヒルベルト流の演繹体系

命題論理における，ヒルベルト流の演繹体系の公理に加えて，次のような公理を加える．(i) $\forall x A[x] \Rightarrow A[t]$, (ii) $\forall x(A \Rightarrow B[x]) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B[x])$（ただし，$A$ に x は自由に出現しない）．$\exists x A[x]$ は，$\neg\forall x \neg A[x]$ の略記であると考える．(i) は代入の公理と呼ばれる．そして，推論規則は三段論法に加えて，もう一つ，汎化（generalization）と呼ばれる推論規則「$A[x]$ から $\forall x A[x]$ を導く」が導入される．

(2) シーケント計算

シーケント計算では次のような推論規則が追加される．

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A[a]}{\Gamma \to \Delta, \forall x A[x]}\ \forall\text{右} \qquad \frac{A[t], \Gamma \to \Delta}{\forall x A[x], \Gamma \to \Delta}\ \forall\text{左}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A[t]}{\Gamma \to \Delta, \exists x A[x]} \ \exists 右 \qquad \frac{A[a], \Gamma \to \Delta}{\exists x A[x], \Gamma \to \Delta} \ \exists 左$$

ただし，変数 a は，Γ, Δ など $A[a]$ 以外の部分には自由に出現しないものとする．

カット除去定理は述語論理のシーケント計算においても成り立つ．

（3）自然演繹

自然演繹では次のような推論規則が追加される．

$$\frac{A[t]}{\forall x A[x]} \ \forall 導入 \qquad \frac{\forall x A[x]}{A[t]} \ \forall 消去$$

$$\frac{A[t]}{\exists x A[x]} \ \exists 導入 \qquad \frac{\exists x A[x] \qquad \begin{matrix}[A(t)] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \ \exists 消去$$

最初と最後の推論規則には次のような条件が課せられる．推論規則 ∀ 導入において，項 t は，$\forall x A[x]$ 及び $\forall x A[x]$ が依存しているどの仮定においても自由変数にはならない．推論規則 ∃ 消去において，項 t は，$\exists x A[x]$，及び C が依存しているどの仮定においても自由変数にはならない．

（4）算　術

領域を自然数に限定し，言語は定数記号としては 0 をとり，関数記号としては $x \mapsto x+1$ という関数を表す S（アリティ 1），足し算を表す +（アリティ 2），かけ算を表す ·（アリティ 2）をとる．そして述語記号としては等号 = と不等号 < をとる．そういう一階述語論理を算術（arithmetic）と呼ぶ．算術では，演繹体系には，自然数に関する公理や推論規則を追加する．ヒルベルト流の演繹体系においては，次のような公理を追加することになる．(i) $\forall x \forall y (S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$, (ii) $\forall x (\neg\, (0 = S(x)))$, (iii) $\forall x (x + 0 = x)$, (iv) $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$, (v) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$, (vi) $\forall x \forall y (x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$, (vii) $\forall x (0 < S(x))$, (viii) $\forall x (\neg (x < 0))$, (ix) $\forall x \forall y (S(x) < S(y) \Leftrightarrow x < y)$, (x) $\forall x \forall y (x = y \land A[x] \Rightarrow A[y])$, (xi) $A[0] \land \forall x (A[x] \Rightarrow A[S(x)]) \Rightarrow \forall x A[x]$. 特に，最後の公理は数学的帰納法（mathematical induction）と呼ばれる．

■12 群 - 2 編 - 7 章

7-3 様相論理

（執筆者：西崎真也）［2009 年 8 月 受領］

様相論理（modal logic）とは，必然性や可能性などの様相（modality）と呼ばれる概念が導入された論理である．様相論理では可能世界と呼ばれる複数の状態を想定し，「どのような世界においても必ず成り立つ」ということや「ある世界においては成り立つことがありうる」ということを表現することが可能になっている．世界を数学的に定式化したものがクリプキ構造であり，様相論理の意味論はクリプキ構造により与えることができる．以下では，様相論理の体系の最も基本的なものである命題様相論理（propositional modal logic）を紹介する．

7-3-1 クリプキ構造

クリプキ構造（Kripke structure）S とは，三つ組 $S = (W, R, V)$ であり，各成分は次のとおり．(i) $W \neq \emptyset$, (ii) $R \subseteq W \times W$, (iii) $V : W \times \mathbb{P} \to \mathbb{B}$. 集合 W の要素を可能世界（possible world）もしくは単に世界（world）と呼ぶ．世界の間の二項関係 R を到達可能関係性関係（reachability relation）と呼ぶ．$(w_1, w_2) \in R$ を $w_1\ R\ w_2$ と書き，「w_2 は w_1 から到達可能（reachable）である」という．関数 V は，各世界において命題記号に対する意味を定める．

クリプキ構造 $S = (W, R, V)$ の例として，次のようなものが考えられる．W を集合 $\{x_1, \ldots, x_6\}$ とし，R を x_1Rx_2, x_1Rx_3, x_2Rx_2, x_2Rx_3, x_3Rx_2, x_4Rx_5, x_5Rx_4, x_5Rx_6, のみが成り立つような関係とし，そして，V を，$V(w, P) = 1$ となるような (w, P) としては (x_1, Q), (x_2, P), (x_2, Q), (x_3, P), (x_4, Q), (x_6, P) のみとする．

7-3-2 命題様相論理の構文論

命題論理の命題を定義する規則と同じく以下の三つの規則を設ける．(i) 命題記号 P は命題である．(ii) A, B が命題ならば $(A \vee B)$ は命題である．(iii) A が命題ならば $(\neg A)$ は命題である．本章では記述を簡単にするために，$A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $\top$, $\bot$ を構文としては定義せず，連言と否定を組み合わせたものの略記と考えることとする．そして，命題様相論理では次の規則を新たに導入する．(iv) A が命題ならば，$(\Box A)$ は命題である．$(\Box A)$ は，「必ず A が成り立つ」ということを意味する．$\Box$ のような記号を様相記号と呼び，$\Box$ を必然を表す様相記号と呼ぶ．様相記号にはこのほかに，可能を表す様相記号 $\Diamond$ がある．これは，$(\Diamond A) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\neg(\Box(\neg A)))$ と定義され，「必ず A でない，というわけではない」ということを意味する．

7-3-3 命題様相論理の意味論

命題様相論理の意味論は，クリプキ構造，世界，命題の間の 3 項関係 $S, w \models A$ を定義するところから始まる．この 3 項関係は次の規則から帰納的に定義される．(i) $V(w, P) = 1$ ならば，$S, w \models P$ である．(ii) $S, w \models A$ でないならば，$S, w \models (\neg A)$ である．(iii) $S, w \models A$ または，$S, w \models B$ ならば，$S, w \models (A \vee B)$ である．(iv) wRw' をみたす任意の $w' \in W$ に対して $S, w' \models A$ ならば，$S, w \models \Box A$ である．

クリプキ構造 S の任意の可能世界 $w \in W$ に対して，$S, w \models A$ が成り立つとき，$S \models A$ と書く．そして，任意のクリプキ構造 S に対して，$S \models A$ が成り立つとき，$\models A$ と書き，A を

恒真であるという．また，$S, w \models A$ が成り立つようなクリプキ構造 S, 可能世界 w が存在するとき，A は充足可能であるといい，S は A のモデルであるという．

前節であげたクリプキ構造においては，$S, x_2 \models \Box P$ は成り立つが，$S, x_2 \models \Box Q$ は成り立たない．$S, x_5 \models \Box(P \vee Q)$ は成り立つが，$S, x_5 \models \Box P \vee \Box Q$ は成り立たない．

恒真な論理式としては，例えば，$\models \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ がある．このようなかたちの論理式には，**K** という名前が付いている．

また,「$\models A$ ならば, $\models \Box A$」という性質が成り立つ．この性質を必然化と呼ぶ．ちなみに, $\models A \Rightarrow \Box A$ は成り立たないことに注意が必要である．また,「$\models A \Rightarrow B$ ならば, $\models \Box A \Rightarrow \Box B$」という性質が成り立ち，更に一般的に,「$\models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ ならば, $\models (\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n) \Rightarrow \Box B$」が成り立つ．しかし，$\models (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ は成り立たないことに注意が必要である．

到達可能性関係に制約を設けることにより，次のようなかたちの論理式が成り立つことが知られている．

R が反射的であるならば，$S \models \Box A \Rightarrow A$ である．これを **T** と呼ぶ．R が推移的であるならば，$S \models \Box A \Rightarrow \Box\Box A$ である．これを **4** と呼ぶ．R が対称的であるならば，$S \models \Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$ である．これを **5** と呼ぶ．

7-3-4 命題様相論理の演繹体系

命題様相論理の演繹体系も，命題論理と同様に，ヒルベルト流の演繹体系，自然演繹，シーケント計算を考えることができる．ここでは，ヒルベルト流の演繹体系を紹介する．

命題様相論理のヒルベルト流演繹体系では，命題論理の演繹体系に対して，推論規則として必然化規則「A から $\Box A$ を導く」を加え，公理として，**K**, すなわち, $\models \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ を加えたものである．このような命題様相論理は正規様相論理と呼ばれ，K と名付けられている．更に，**T**, すなわち，$\Box A \Rightarrow A$ を公理として加えた様相論理は，T と呼ばれる．そして更に，**4**, すなわち，$\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ を公理として加えた様相論理は $S4$ と呼ばれる．様相論理 T に，公理として **5**, すなわち，$\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$ を加えたものは $S5$ と呼ばれる．

■12 群 - 2 編 - 7 章

7-4 時相論理

（執筆者：西崎真也）[2009 年 8 月 受領]

時相論理は様相論理の一種であり，時間とともに変化する状態に依存して論理式の意味が決まるような論理である．論理式で時間に関連した記述ができることが特徴となっている．各時刻を個々の可能世界とすることにより，時相論理はクリプキ構造により定式化される．時相論理は，時間がどのような構造であるととらえるのかということに依存して，分岐時間時相論理と線型時間時相論理に大別することができる．

分岐時間時相論理（branching-time temporal logic）では，時間は木として考えられる．木の根が現在の時刻であり，木の分岐は，状態遷移の非決定的な分岐に対応する．木が一つ与えられると，論理式の意味が決まる．代表的なものとしては，CTL がある．

一方，線型時間時相論理（linear-time temporal logic）では，時間というものを経路（path）の集合と考え，一つの経路が一つのインスタンスとなる．時間の一つの経路が決まると，論理式の意味は決まる．代表的なものとしては，LTL がある．

7-4-1 計算木論理 CTL

ここで定義される計算機論理 CTL は，分岐時間時相論理の一種である．論理式は以下のように定義される．

$$
\begin{aligned}
A \quad ::= \quad & P \mid (\neg A) \mid (A \vee B) \mid \mathbf{EX}A \mid \mathbf{E}(A\mathbf{U}B) \mid \mathbf{EF}A \mid \mathbf{EG}A \\
& \mid \mathbf{AX}A \mid \mathbf{A}(A\mathbf{U}B) \mid \mathbf{AF}A \mid \mathbf{AG}A
\end{aligned}
$$

分岐時間論理では，ある状態から次の状態への遷移が必ずしも一通りではない．一般に複数に分岐する．ある状態から遷移していく状態の列を経路と呼ぶ．ある状態からはじまる経路は一通りとは限らない．

EX や **AF** などは，**X**, **U**, **F**, **G** に **E**,**A** が修飾してできている．前者四つを時相演算子（temporal operator）と呼び，後者二つを経路限定子（path quantifier）と呼ぶ．

経路限定子 **E** は，「現在の状態から始まる，ある経路において」ということを意味し，**A** は，「現在の状態から始まる，すべての経路において」ということを意味している．

そして時相演算子 **X** は「次の状態で」，**G** は「現在から始まる経路上の任意の状態で」，**F** は「現在から始まる経路上のある状態で」を意味する．$A\mathbf{U}B$ は「B が成り立つまでは A が成り立つ」を意味する．これらは各々，$\underline{e}$*xists*, $\underline{a}$*ll*, *ne*$\underline{x}$*t*, $\underline{g}$*lobal*, $\underline{f}$*inally*, $\underline{u}$*ntil*, に由来する．

クリプキ構造 $S = (W, R, V)$ が与えられると，計算木論理の意味は 3 項関係 $S, w \models A$ により定まる．この 3 項関係は次の規則から帰納的に定義される．(i) $V(w, P) = 1$ ならば，$S, w \models P$ である．(ii) $S, w \models A$ でないならば，$S, w \models (\neg A)$ である．(iii) $S, w \models A$ または，$S, w \models B$ ならば，$S, w \models (A \vee B)$ である．(iv)「w で始まる経路 $w_0 (= w), w_1, w_2, \ldots$ が存在して，ある非負整数 k に対して $w_k \models B$ ならば，k 未満の任意の非負整数 i に対して $w_i \models A$ が成り立つ」ということであれば，$w \models \mathbf{E}(A\ \mathbf{U}\ B)$ である．ここで経路 $w_0, w_1, w_2, \ldots$ とは，$w_0 R w_1, w_1 R w_2, \ldots$ が成り立つような世界の列のことである．$\mathbf{EF}\,A$, $\mathbf{AF}\,A$ は各々，$\mathbf{E}(\top\ \mathbf{U}\ A)$, $\mathbf{A}(\top\ \mathbf{U}\ A)$ と定義され，$\mathbf{EG}\,A$, $\mathbf{AG}\,A$ は各々，$\neg(\mathbf{AF}\,\neg A)$, $\neg(\mathbf{EF}\,\neg A)$ と定義される．この定義にしたがうと，

例えば $w \models \mathbf{A}\,\mathbf{F}\,A$ は「w で始まる任意の経路 $w_0(=w), w_1, w_2, \ldots$ において，ある非負整数 k に対し $w_k \models A$ である」ということを意味することとなる．

$\mathbf{EF}$, $\mathbf{EG}$, $\mathbf{AF}$, $\mathbf{AG}$ とクリプキ構造との関連を図示する．各々の木構造の図の根が現在の時刻であり，下方向が時間の進行方向となっている．$\mathbf{EF}\,P$ は現在から始まるある経路が存在して，その経路上に P が成り立つ状態が存在することを意味する．$\mathbf{EG}\,P$ は現在から始まるある経路が存在して，その経路上のすべての状態において P が成り立つことを意味する．$\mathbf{AF}\,P$ は現在から始まるすべての経路上において P が成り立つ状態が存在することを意味する．$\mathbf{AG}\,P$ は現在から始まるすべての経路上のすべての状態において P が成り立つことを意味する．

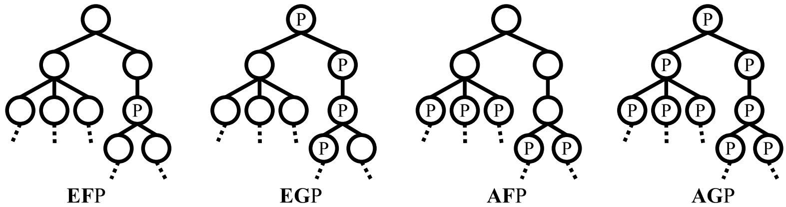

図 7･1　経路限定子と時相演算子

7-4-2 線型時間時相論理 LTL

線型時間時相論理 LTL は以下のように定義される．

$$A ::= P \mid (\neg A) \mid (A \vee B) \mid \mathbf{X}A \mid A\mathbf{U}B \mid \mathbf{F}A \mid \mathbf{G}A$$

$\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ は，CTL と同様，時相演算子と呼ばれる．

LTL の論理式の意味は，経路に対して定められ，経路 π と論理式 A の二項関係である $\pi \models A$ により与えられる．(i) $V(w_0, P) = 1$ ならば，$w_0, w_1, \ldots \models P$ である．(ii) $\pi \models A$ でないならば，$\pi \models \neg A$ である．(iii) $\pi \models A$，または，$\pi \models B$ ならば，$\pi \models A \vee B$ である．(iv) $w_1, \ldots \models A$ ならば，$w_0, w_1, \ldots \models \mathbf{X}\,A$ である．(v) $\pi^k \models B$ をみたす k が存在し，k 未満の非負整数 i に対して，$\pi^i \models A$ ならば，$\pi \models A\ \mathbf{U}\ B$ である．ただし，経路 $\pi = w_0, w_1, \ldots$ に対して，π^i とは，$w_i, w_{i+1}, \ldots$ を意味する．

$\mathbf{F}\,A$, $\mathbf{G}\,A$ は各々，$\top\mathbf{U}A$, $\neg(\mathbf{F}\neg A)$ と定義される．クリプキ構造 $S = (W, R, V)$, 世界 w, 論理式 A に対して，$S, w \models A$ とは，w で始まる S における任意の経路 π に対して，$\pi \models A$ が成り立つことを意味する．

見かけ上は，LTL は CTL よりも記述力に劣るように見えるかもしれない．実際には，LTL の表現力が劣るということもないし，逆に CTL の表現力が劣るということもない．例えば，LTL の論理式 $\mathbf{F}\,\mathbf{G}\,P$ に相当する CTL の論理式は存在しない．一方，CTL の論理式 $\mathbf{AG}\,\mathbf{EF}\,P$ に相当する LTL の論理式も存在しない．この二つの体系を融合したものとして，CTL* と呼ばれる時相論理がある．

様々な時相論理のうちで大変記述力が強力なものとして様相 μ 計算というものもある．この体系において論理式は

$$A ::= P \mid X \mid \neg A \mid A \vee B \mid \Box A \mid \mu X.A$$

と定義される．P は命題定数であり，X は命題変数である．$\Box A$ は CTL の **AX** に相当する．$\diamond A$ は，$\neg\Box\neg A$ として定義される．$\mu X.A$ は最小不動点と呼ばれる構文であり，再帰的定義を可能とする．例えば，$\mu X.P \vee \diamond X$ は $X = P \vee \diamond X$ という再帰的定義により与えられる “論理式” $P \vee \diamond(P \vee \diamond(P \vee \diamond(\cdots)))$, すなわち，$P \vee \diamond P \vee \diamond\diamond P \vee \cdots$ を表している．これは，CTL の **EF** P に相当するものである．

■参考文献

1) M.Huth, M. Ryan, “*Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems*,” 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2004.
2) J. R. Shoenfield, “*Mathematical Logic*,” 2nd Revised ed., A K Peters Ltd, 2001.
3) D. van Dalen, “*Logic and Structure*,” 4th ed., Springer, 2004.
4) 萩谷昌己, 西崎真也, “論理と計算のしくみ,” 岩波書店, 2007.
5) G. Takeuti, “Proof Thoery,” 2nd Rev. Sub ed., Elsevier, 1987.