

## 12 群(電子情報通信基礎) - 4 編(力学・電磁気学)

## 4 章 波と光

(執筆者: 鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

**概要**

本章では波と光を扱う。私たちの身の回りの空間は音波や電波や光波などの波に満ちている。音波と光波は日常生活に最も関わりの深い波であり、人間や動物の間の情報伝達に重要な役割を果たしている。電波と光波は社会生活に不可欠な情報通信の担い手である。なお、電波も光波も電磁波で、電波は狭義には比較的波長の長い電磁波、光波は視覚に感じる短波長の電磁波である。波には以上のほかに固体中を弾性波、例えば地震波、水面や水中を伝わる波、例えば海面の波や津波、直線上に張られた針金や糸を伝わる波、例えば弦を伝わる波、などいろいろある。

物理的には波動現象とは、物質の“移動”を伴わないでエネルギーが移送される現象である。物質中を波が伝わっているとき、物質を構成する粒子は平均位置の周りに振動しているだけで、“移動”するわけではない。この意味で波は今日の情報化社会で重要な役割を果たしている。情報通信は物質を移動させることなく、エネルギーの形態で情報を伝えているからである。

本章では波についての基礎知識を学ぶ。

**【本章の構成】**

波が媒質中を伝わっているとき媒質中の物質は振動をしている。本章では、まず最も基本的な振動である単振動について調べ、あわせて減衰振動、強制振動、連成振動を扱う。次に、弦や棒を伝わる波を記述する波動方程式を導き、波動方程式の解の一般的な特徴を調べる。

次いで日常生活で最も身近な音波と光波について扱う。特に光波は、ある場合は幾何学的に扱うことができ、ある場合には波としての性質を現す。どのような場合に幾何学的に扱えるのか、どのような場合に波として扱うのか調べる。更に光の波としての性質である干渉と回折を扱う。最後に偏光について触れよう。

- |               |                |
|---------------|----------------|
| 4.1 単振動とその合成  | 4.9 光 波        |
| 4.2 減衰振動      | 4.10 幾何光学      |
| 4.3 強制振動と共鳴   | 4.11 光の干渉      |
| 4.4 連成振動      | 4.12 スリットによる回折 |
| 4.5 弦を伝わる横波   | 4.13 回折格子      |
| 4.6 棒を伝わる縦波   | 4.14 偏 光       |
| 4.7 波動方程式とその解 | 4.15 演習問題      |
| 4.8 音 波       |                |

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-1 単振動とその合成

(執筆者：鈴木 勝，伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

## 4-1-1 単振動

等しい時間間隔で繰り返される周期的な運動を振動という。振動する質点または物体を振動子、繰り返しの時間間隔を周期、周期の逆数を振動数または周波数と呼ぶ。

周期的な運動は無数にあるが、あらゆる周期現象を解析するのに役立つ最も基本的な周期的運動は、単振動あるいは 1 次元調和振動である。運動の行われる直線を  $x$  軸に、時刻を  $t$  とすると、単振動は次の式で表される。

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin(2\pi\nu t + \varphi_0) \quad (4.1)$$

ただし、振動の中心（平衡点）を座標原点ととしており、 $x$  は平衡点からの変位、 $t$  は時刻である。定数  $\nu$  を振動数または周波数、 $\omega = 2\pi\nu$  を角振動数または角周波数、 $\varphi_0$  を初期位相という。運動の範囲は  $A \geq x \geq -A$  の範囲内に制限される。定数  $A$  を振動の振幅という。周期は  $\omega t$  が  $2\pi$  だけ増加する時間であるから、周期  $T$  は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad (4.2)$$

である。運動はある時刻における変位  $x$  と速度  $v = dx/dt$  を与えれば完全に決定される。 $t = 0$  で  $x = x_0$ 、 $v = v_0$  とすれば

$$x_0 = A \sin \varphi_0, \quad v_0 = \omega A \cos \varphi_0 \quad (4.3)$$

の関係から、振幅  $A$  と初期位相  $\varphi_0$  は次式となる。

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (4.4)$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \frac{\omega x_0}{v_0}, \quad \text{ただし } \sin \varphi_0 = \frac{x_0}{A} \text{ を満たす} \quad (4.5)$$

運動の法則によれば振動子に作用する力  $F$  は、振動子の質量  $m$  と加速度の積に等しい。

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -kx, \quad \text{ただし } k = m\omega^2 \quad (4.6)$$

力の大きさは変位に比例する。比例定数  $k$  を弾性定数という。また、力の方向は振動子を平衡位置に戻そうとする向きである。通常、平衡点からの変位が小さければ振動子に作用する力（復元力）は変位に比例し、単振動が生じる。

振動子の力学的エネルギーは運動エネルギー  $mv^2/2$  と位置エネルギー  $kx^2/2$  の和である。式 (4.1) を用いて運動エネルギーと位置エネルギーは、それぞれ

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Am\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Ak \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (4.8)$$

であるが、 $k = m\omega^2$  の関係があるので

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Am\omega^2 \quad (4\cdot9)$$

となり、力学的エネルギーは時間によらず一定である。また、時間平均を  $\langle \rangle$  で表すと

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}kx^2 \right\rangle = \frac{1}{4}Am\omega^2 \quad (4\cdot10)$$

である。単振動においては、運動エネルギーの平均値と位置エネルギーの平均値は等しい。

#### 4-1-2 1次元単振動の合成

同一直線上の2つの単振動

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (4\cdot11)$$

の合成を考えよう。特に  $\omega_1 = \omega_2 (= \omega)$  の場合には、合成振動は同じ振動数の単振動となる。

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4\cdot12)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (4\cdot13)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \quad \text{ただし } \sin \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A} \quad (4\cdot14)$$

また、 $A_1 = A_2 (= A)$  の場合には

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (4\cdot15)$$

となるが、特に  $|\omega_1 - \omega_2| \ll |\omega_1 + \omega_2|$  の場合には、平均の角振動数  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  の振動の振幅が次の式で表されるような変調を受けた振動となる。

$$x_a = 2A \left| \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \right| \quad (4\cdot16)$$

このような振動をうなりという。うなりの一例を図4・1に示す。うなりの角振動数は  $|\omega_1 - \omega_2|$  である。

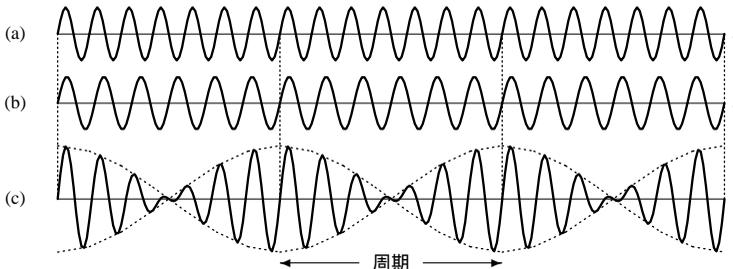


図4・1 振動数比7:6の振動(a)と(b)の合成振動(c)。うなりの周期を矢印で示した。

### 4-1-3 フーリエ級数

単振動が重要であるわけは、それが振動の最も基本的な振る舞いを表しており、任意の周期運動は単振動の重ね合わせとして表すことができることにある。

周期関数を  $f(t)$  とし、その周期を  $T$  としよう。すなわち、 $f(t+T) = f(t)$  である。このような関係を満足する最も周期の長い単振動は  $\sin(2\pi t/T)$  と  $\cos(2\pi t/T)$  である。これらの基本振動に倍音を加えても周期性は変わらないから、 $f(t)$  は一般に次のように表すことができる。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4 \cdot 17)$$

このような級数をフーリエ級数 (Fourier Series) と呼ぶ。関数  $f(t)$  を与えたときに、係数  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は次のように求めることができる。まず、式 (4・17) の平均をとる。すなわち、1 周期にわたって定積分した結果を周期で割る。sin 関数と cos 関数の平均値は 0 であるから、 $a_0$  は  $f(t)$  の平均値であることが分かる。したがって、 $a_0$  は次式で与えられる。 $t_0$  は任意の定数であり、計算しやすい値に選んでよい。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (4 \cdot 18)$$

次に、 $a_n$  ( $n \neq 0$ ) は式 (4・17) の両辺に  $\cos(n\omega t)$  をかけて平均操作を行うことによって求める。 $n, m$  を任意の整数とすると  $\sin(n\omega t) \cos(m\omega t)$  の平均は常に 0、 $\cos(n\omega t) \cos(m\omega t)$  の平均は  $n \neq m$  のときには 0、 $n = m$  のときには  $1/2$  であるから

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a_n \cos^2(n\omega t) dt = \frac{a_n}{2} \quad (4 \cdot 19)$$

すなわち

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (4 \cdot 20)$$

と求まる。同様に  $b_n$  は  $\sin(n\omega t)$  をかけて平均操作を行うことによって次のように求まる。

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (4 \cdot 21)$$

例えば、図 4・2 の矩形波 (方形波) を考えてみよう。図の  $f(t)$  は奇関数であるから cos の項はない。また、平均値は 0 なので  $a_0 = 0$  である。係数  $b_n$  を計算すると  $n$  が偶数のとき

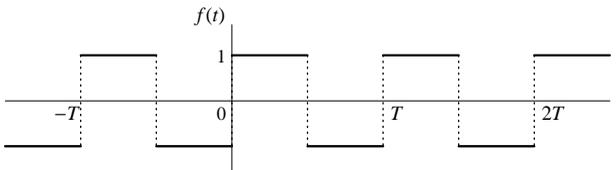


図 4・2 矩形波 (方形波)

$b_n = 0$  , 奇数のとき  $b_n = 4/n\pi$  で , フーリエ級数展開式は次式となる ( $\omega = 2\pi/T$ ) .

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4}{n\pi} \sin(n\omega t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right\} \quad (4\cdot22)$$

#### 4-1-4 互いに垂直な単振動の合成

互いに垂直な 2 つの単振動

$$x = A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x), \quad y = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y) \quad (4\cdot23)$$

の合成を考えよう .  $x$ - $y$  平面上に  $(x, y)$  が描く軌跡をリサージュ (Lissajous) 図形と呼び ,  $\omega_x$  ,  $\omega_y$  が整数比のとき独特な曲線図形となる . 特に ,  $\omega_x = \omega_y$  のときには軌跡は次式で表される楕円となる (ただし  $\varphi_x - \varphi_y = n\pi$  のときは直線) .

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos(\varphi_x - \varphi_y) = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y) \quad (4\cdot24)$$

$\omega_x$  ,  $\omega_y$  が簡単な整数比のときのリサージュ図形の例を図 4・3 に示す .

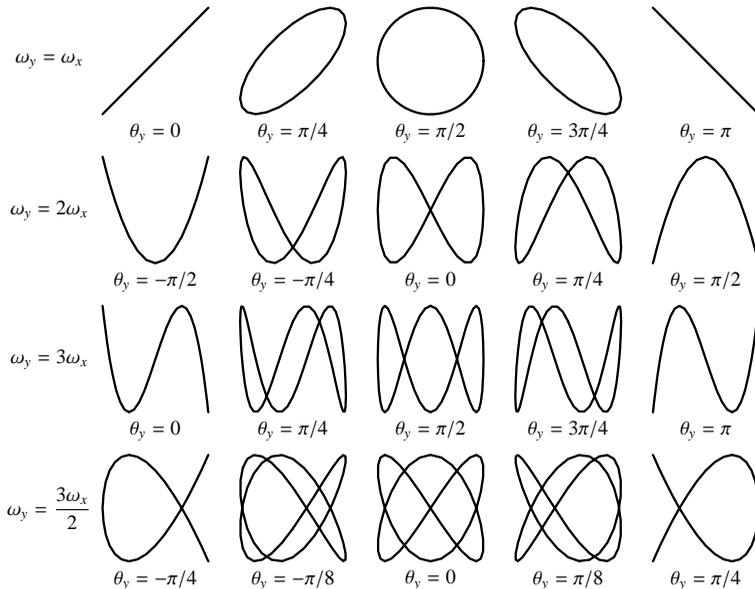


図 4・3 リサージュ図形の例 .  $\theta_x = 0$  とする .

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-2 減衰振動

(執筆者：鈴木 勝，伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

## 4-2-1 減衰振動

現実の力学系においてはエネルギーを減少させるような抵抗力が作用するので，自由振動は時間とともに減衰して，ついには消失する．この減衰過程は，速度に比例する抵抗力で良い近似で記述される．質点の速度が  $v (= dx/dt)$  のときの抵抗力を  $-cv$  とすると，運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} \quad (4\cdot25)$$

整理して

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4\cdot26)$$

となる．ただし

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m} \quad (4\cdot27)$$

を導入した． $\omega_0$  は減衰のない場合の自由振動の角振動数である． $x(t) = e^{-\gamma t} u(t)$  とおくと運動方程式 (4·26) は  $u(t)$  についての方程式に書き換えられる．

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u = 0 \quad (4\cdot28)$$

この方程式の解は  $\omega_0$  と  $\gamma$  の大小関係で異なり，運動もそれぞれの場合で異なる様相を示す．

$$\zeta = \frac{\gamma}{\omega_0} \quad (4\cdot29)$$

を減衰比と呼ぶ．

(1)  $\gamma < \omega_0$  の場合

この場合には式 (4·28) の一般解は

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (4\cdot30)$$

と書ける．定数  $A$  と  $\varphi$  は初期条件によって決められる定数である． $x(t)$  は

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4\cdot31)$$

と表される． $\varphi = \pi/2$  の場合について式 (4·31) の一例を図 4·4 に図示する．このような振動を減衰振動という．

減衰が緩やか ( $\gamma \ll \omega_0$ ) である場合には  $\omega \cong \omega_0$  である．この場合には振動は，振幅が

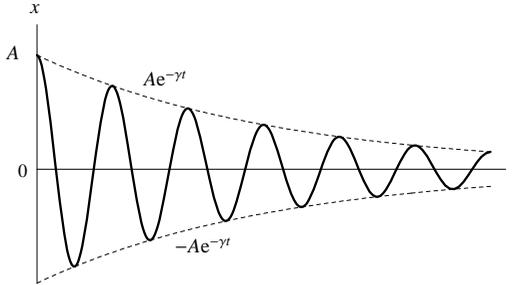


図 4.4 減衰振動． $\gamma = \omega_0/20$  の場合．点線は  $x = \pm Ae^{-\gamma t}$  を示す．

$Ae^{-\gamma t}$  に従って減衰していく単振動と近似できる． $\gamma$  は振幅減衰率であり，その逆数  $\tau = 1/\gamma$  は振幅が  $1/e$  に減衰する時間（時定数）である．

(2)  $\gamma > \omega_0$  の場合

この場合には，式 (4.28) の一般解は

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (4.32)$$

と書ける．定数  $c_1$  と  $c_2$  は初期条件によって決められる定数である． $x(t)$  は

$$x(t) = c_1 e^{-(\gamma-\alpha)t} + c_2 e^{-(\gamma+\alpha)t} \quad (4.33)$$

と表される．振動することなく平衡点にゆっくり近づく．“過減衰”と呼ばれる．

(3)  $\gamma = \omega_0$  の場合

この場合には，式 (4.28) の一般解は

$$u(t) = at + b \quad (4.34)$$

と書ける．定数  $a$  と  $b$  は初期条件によって決められる定数である． $x(t)$  は

$$x(t) = e^{-\gamma t} (at + b) \quad (4.35)$$

と表される．この場合にも振動することなく平衡点に近づくが，平衡への近づき方が過減衰の場合より速い．“臨界減衰”と呼ばれる．

一般に機械や構造物において不要な振動が起きた場合に備えて減衰器（ダンパー）を設ける場合に，減衰が臨界減衰となるように設計することが一番良いとされる．ダンパー付き振動系の例として自動的に閉まるドアを考えてみよう．臨界減衰となるようにダンパーを調整すれば，ドアは素早く，静かに閉まる．過減衰の場合には閉まるまでに時間がかかる．臨界減衰より減衰が小さい場合には行き過ぎたり戻ったりを繰り返してなかなか閉まらないか，あるいは戸枠に衝突して「バタン」と大きな音をたてることになる．臨界減衰は，平衡位置にできるだけ速くなめらかに静止させる条件である．

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-3 強制振動と共鳴

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

周期的な外力を受ける振動系を考えよう。外力の振動数が振動系の固有振動数に近い場合には、外力が小さくても振幅を大きくすることができる。この現象が共鳴あるいは共振である。また、周期的な外力を受ける系は、十分な時間を経過した後は外力の振動数で定常的に振動する。この定常的な振動が強制振動である。この節ではこれらの現象を考察する。

## 4-3-1 強制振動

前節で考えた力学系が周期的な力  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  を受けるとしよう。運動方程式 (4.25) の右辺に  $F(t)$  を加えて

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (4.36)$$

整理して

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (4.37)$$

となる。ただし

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m}, \quad f = \frac{F_0}{m} \quad (4.38)$$

である。 $\omega_0$  は減衰のない場合の自由振動の角振動数である。方程式 (4.37) の定常解を複素関数の方法を用いて求める。 $x = \text{Re}(z)$  と置くと  $z$  に対する方程式は

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f e^{i\omega t} \quad (4.39)$$

である。ここで、 $i \equiv \sqrt{-1}$  は虚数単位、 $\text{Re}$  は実数部分をとることを意味する。式 (4.39) の定常解を

$$z = A e^{i(\omega t - \delta)} \quad (4.40)$$

と仮定する。 $A$  と  $\delta$  は実数である。 $z$  を式 (4.39) に代入して次式を得る。

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2i\gamma\omega A = f e^{i\delta} \quad (4.41)$$

実数部分と虚数部分をとると

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = f \cos \delta, \quad 2\gamma\omega A = f \sin \delta \quad (4.42)$$

これらを解いて次の結果を得る。

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (4.43)$$

$$\tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.44)$$

式 (4.37) の定常解は

$$x = A \cos(\omega t - \delta) \quad (4.45)$$

と表される．周期的外力の振動数に等しい振動数を持つ，この定常的な振動が強制振動である． $A$  は振幅， $\delta$  は外力に対する変位の位相遅れである．数学的には，この定常解は非斉次微分方程式 (4.37) の特殊解であるので，斉次方程式 (4.25) の一般解を加えれば非斉次方程式 (4.37) の一般解を得る．外力のないときには減衰振動となる場合 ( $\gamma < \omega_0$ ) には，方程式 (4.37) の一般解は，式 (4.31) と式 (4.45) を加え合わせて

$$x(t) = A' e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \varphi) + A \cos(\omega t - \delta) \quad (4.46)$$

と表される．ただし， $A'$  と  $\varphi$  は初期条件によって決まる定数．また， $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  である．時間が経つと右辺第 1 項の減衰振動項は消失し，第 2 項の強制振動項だけとなる．定常的な強制振動項だけになるまでの過程を過渡現象と呼ぶ．

#### 4-3-2 共 鳴

強制振動の特徴は周期的な外力の振動数が自由振動の固有振動数に近いところで，振動の振幅が顕著に大きくなることである．この現象を共鳴あるいは共振と呼ぶ．強制振動の振幅  $A$  と位相角  $\delta$  を角振動数  $\omega$  の関数として図 4.5 に示す．

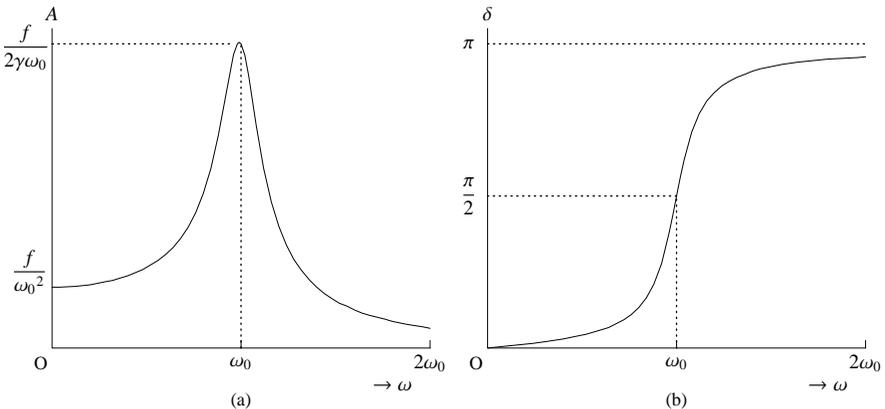


図 4.5 (a) 振幅  $A$  と (b) 位相遅れ  $\delta$  の振動数依存性

減衰が小さい ( $\gamma \ll \omega_0$ ) 場合には，定常振動の振幅は事実上  $\omega = \omega_0$  で最大となり， $|\omega - \omega_0| = \gamma$  で  $1/\sqrt{2}$  (振動のエネルギーは  $1/2$ ) となる．図 4.5(a) の曲線のピークの鋭さ

を表す無次元のパラメータ

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (4\cdot47)$$

を  $Q$  値と呼ぶ。また、周期的外力に対する振動の位相の遅れは  $\omega \ll \omega_0$  のときの 0 から、 $\omega$  のとともに単調に増加し、 $\omega = \omega_0$  で  $\pi/2$ 、 $\omega \gg \omega_0$  で  $\pi$  である。すなわち、強制振動は  $\omega \ll \omega_0$  では外力と同位相であるが、 $\omega \gg \omega_0$  では外力と逆位相となる。

減衰がある力学系で振動の振幅を一定に保つために必要な単位時間当たりのエネルギー（仕事率）を求めよう。仕事率の瞬時値  $P$  は力と速度の積に等しい。

$$P = F \frac{dx}{dt} \quad (4\cdot48)$$

$F = F_0 \cos \omega t$  及び  $x = A \cos(\omega t - \delta)$  を代入して

$$P = -\omega A F_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \delta) \quad (4\cdot49)$$

$$= \omega A F_0 \sin \delta (\cos^2 \omega t - \cos \omega t \sin \omega t) \quad (4\cdot50)$$

多くの周期にわたって平均しよう。 $\cos^2 \omega t$  の平均値は  $1/2$ 、 $\cos \omega t \sin \omega t$  の平均値は 0 なので、仕事率の平均値  $\bar{P}$  は次の式で与えられる\*。

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega A F_0 \sin \delta = \frac{m f^2 \gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad (4\cdot51)$$

単位時間当たりに吸収されるエネルギーは  $\omega = \omega_0$  において最大

$$\bar{P}_{\max} = \frac{m f^2}{4\gamma} = \frac{F_0^2}{4m\gamma} = \frac{Q F_0^2}{2m\omega_0} \quad (4\cdot52)$$

となる。 $\gamma \ll \omega_0$  の場合には  $|\omega - \omega_0| \cong \gamma$  において  $\bar{P}$  は最大値の  $1/2$  となる。 $Q$  値が大きいときには、共鳴するときに顕著なエネルギー吸収が起きる。

共鳴現象あるいは共振現象は様々な物理系において観測される。電気回路における共振、光吸収における共鳴、磁場中における磁気共鳴など、いずれも物理的に重要な共鳴現象である。

\* 三角関数の関係式  $\sin \delta = \frac{\tan \delta}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta}}$  を使った。

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-4 連成振動

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

2 個以上の振動子が相互作用しながら行う振動を連成振動という。

## 4-4-1 2 個の振動子の連成振動

滑らかな水平な直線上で、図 4・6 のようにバネ定数 (バネの弾性定数)  $c$  の 2 つのバネとバネ定数  $c'$  のバネにつながれた質量  $m$  の 2 つの質点 A, B を考える。簡単のため質点が静止しているときにはバネに伸び縮みはないとし、質点の運動は直線上に限られるとする。質点 A, B の平衡点からの変位を  $x_A, x_B$  とすると、バネの伸びは左からそれぞれ  $x_A, x_B - x_A, -x_B$  であるから、質点 A, B の運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -c x_A + c' (x_B - x_A) \quad (4\cdot53)$$

$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -c' (x_B - x_A) + c (-x_B) \quad (4\cdot54)$$

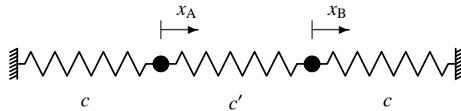


図 4・6 バネで結ばれた 2 つの質点

次の 1 次結合を考えよう。

$$q_1 = x_A + x_B, \quad q_2 = x_A - x_B \quad (4\cdot55)$$

式 (4・53), 式 (4・54) の両辺の和または差をとって  $q_1, q_2$  に書き換えると次の式を得る。

$$m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -c q_1 \quad (4\cdot56)$$

$$m \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -(c + 2c') q_2 \quad (4\cdot57)$$

方程式 (4・53), (4・54) は連立方程式であるが,  $q_1, q_2$  の方程式 (4・56), (4・57) は連立しておらず, それぞれ独立に次の単振動の解を得る。

$$q_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (4\cdot58)$$

$$q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c + 2c'}{m}} \quad (4\cdot59)$$

ただし, 定数  $A_1, A_2$  は振幅,  $\alpha_1, \alpha_2$  は初期位相である。2 つの質点の変位  $x_A, x_B$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$x_A(t) = \frac{1}{2} \{q_1(t) + q_2(t)\}, \quad x_B(t) = \frac{1}{2} \{q_1(t) - q_2(t)\} \quad (4\cdot60)$$

$q_1$  の振動だけが起きているとすれば各質点の変位は等しい。

$$x_A = x_B = \frac{q_1}{2} = \frac{1}{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (4\cdot61)$$

2 つの質点の振動は図 4・7(a) に示すように同位相である。真ん中のバネは伸び縮みのない状態 ( $x_B - x_A = 0$ ) に保たれるので、角振動数  $\omega_1$  は 2 つの質点がつながっていないときの角振動数に等しい。一方、 $q_2$  の振動だけが起きているとき場合には、2 つの質点の振動は逆位相である (図 4・7(b) 参照)。

$$x_A = -x_B = \frac{q_2}{2} = \frac{1}{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (4\cdot62)$$

真ん中のバネは復元力を増大させるので、角振動数  $\omega_2$  は  $\omega_1$  より大きくなる。

このように独立な単振動を与える座標  $q_1, q_2$  を規準座標、対応する振動を規準振動または規準モードと呼ぶ\* (“規準”は“基準”とも書く)。一般的な振動は規準振動の重ね合わせとして表される。

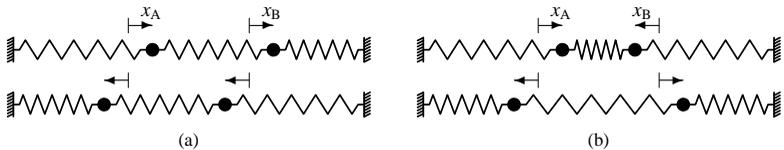


図 4・7 (a) 同位相の規準モード。(b) 逆位相の規準モード。

質点 A を平衡位置から距離  $a$  ずらし、質点 B は平衡位置に置いて、両質点を静かに放したときの運動を考えよう。初期条件は  $t = 0$  で  $x_A = a, x_B = 0, dx_A/dt = 0, dx_B/dt = 0$  である。  $q_1, q_2$  で表すと  $t = 0$  で  $q_1 = a, q_2 = a, dq_1/dt = 0, dq_2/dt = 0$  であるから、式 (4・58)、式 (4・59) の定数は

$$A_1 = A_2 = a, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \quad (4\cdot63)$$

となる。したがって、2 つの質点の振動は

$$x_A(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \quad x_B(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (4\cdot64)$$

と表される ( $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$  である)。

特に結合が弱い (真ん中のバネのバネ定数が小さい) 場合について考えてみよう。  $c' \ll c$  とすると

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c + 2c'}{m}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{2c'}{c}} \cong \omega_1 \left(1 + \frac{c'}{c}\right) \quad (4\cdot65)$$

\* 個々の特性振動をモードという。

である．差の角周波数

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{c'}{c} \omega_1 \quad (4\cdot66)$$

及び平均の周波数  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  を定義すると， $x_A(t)$ ， $x_B(t)$  は次のように表される．

$$x_A(t) = a \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t, \quad x_B(t) = a \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \omega t \quad (4\cdot67)$$

2 つの質点の振動の振幅は交互に大きくなる．一方が大きく振動しているときは他方はほとんど振動しておらず，2 つの振動子の間で交互にエネルギーがやり取りされることが分かる．

#### 4-4-2 多数の振動子の連成振動

次に，多数の振動子の連成振動を考えよう．滑らかで水平な直線上に束縛された質量  $m$  の  $N$  個の質点がバネ定数  $c$  の  $N + 1$  個のバネで図 4・8 のようにつながれている．すべての質点が静止しているときはバネに伸び縮みはないとする． $i$  番目の質点の変位を  $x_i$  とすると，運動方程式は  $N - 1 \geq i \geq 2$  に対して

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -c(x_i - x_{i-1}) + c(x_{i+1} - x_i) \quad (4\cdot68)$$

と書ける． $x_0 = 0$  及び  $x_{N+1} = 0$  と約束すれば， $i = 1$  及び  $i = N$  に対する運動方程式も上式で表される．

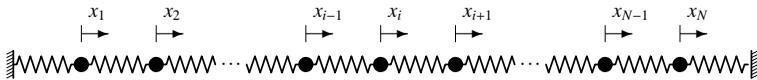


図 4・8 バネで結ばれた  $N$  個の質点

もし一つの規準振動が起こっているとすれば，すべての質点は同じ角振動数で振動しているので

$$x_i(t) = A_i \sin(\omega t + \alpha), \quad i = 0, 1, \dots, N, N + 1 \quad (4\cdot69)$$

と表されるはずである．ただし， $A_0 = 0$ ， $A_{N+1} = 0$  とする． $\alpha$  は定数である．式 (4・69) を (4・68) に代入して

$$-m\omega^2 A_i = -2cA_i + c(A_{i-1} + A_{i+1}) \quad (4\cdot70)$$

を得る．書き換えて次の関係式を得る．

$$\left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) A_i = A_{i-1} + A_{i+1}, \quad \text{ただし } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (4\cdot71)$$

さて， $i$  番目の質点の振幅が

$$A_i = C \sin(i\theta), \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1 \quad (4.72)$$

の形に表されると仮定しよう．ここで， $C$  と  $\theta$  は定数である．このとき式 (4.71) の右辺は

$$A_{i-1} + A_{i+1} = C [\sin\{(i-1)\theta\} + \sin\{(i+1)\theta\}] = 2C \cos \theta \sin(i\theta) \quad (4.73)$$

と変形できるから，式 (4.71) より次の関係を得る．

$$\cos \theta = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \quad (4.74)$$

すなわち，規準振動の角振動数は

$$\omega = \sqrt{2\omega_0^2(1 - \cos \theta)} = 2\omega_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.75)$$

と表される．条件  $A_0 = 0$  は自動的に満たされているので， $\theta$  は条件  $A_{N+1} = 0$  を満たすように決める．異なる  $A_1, A_2, \dots, A_N$  の組を与える  $\theta$  は次の  $N$  個である（すべてが静止しているという解  $A_1 = A_2 = \dots = A_N = 0$  は除く）．

$$\theta = \frac{\pi}{N+1}, \frac{2\pi}{N+1}, \dots, \frac{n\pi}{N+1}, \dots, \frac{N\pi}{N+1} \quad (4.76)$$

$n$  番目の規準振動が起きているときの  $N$  個の質点の運動は次式で表される．

$$x_i(t) = C \sin \frac{in\pi}{N+1} \sin(\omega_n t + \alpha), \quad \omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.77)$$

$\omega_n$  は  $n$  番目の規準振動の角振動数である．バネの両固定端の間隔を  $L$  とすると， $i$  番目質点の平衡位置は  $x_{i0} = iL/(N+1)$  と表されるので

$$x_i(t) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_{i0}\right) \sin(\omega_n t + \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.78)$$

と表すことができる．

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-5 弦を伝わる横波

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

質量が連続的に分布している媒質中の弾性波の伝播を記述するには、任意の微小部分の振動について運動方程式を適用すればよい。弦や棒、流体、固体中を伝わる波はいずれも同じ形の式で記述される。弦や棒を伝わる波を調べることは、波動現象の一般的な理解の基礎となる。

## 4-5-1 弦を伝わる横波

張力  $T$  でまっすぐに張られた一様な長い弦 (String) を伝わる横波を考えよう。弦の張られた方向に  $x$  軸をとり、弦の位置  $x$ 、時刻  $t$  における変位を  $u(x, t)$  とする。変位  $u(x, t)$  は十分に小さく、張力  $T$  は一定と考えてよいとする。弦が  $x$  軸となす角度は小さいので、張力の  $u$  方向の成分は

$$T_u = T \sin \theta \cong T \tan \theta = T \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.79)$$

と表すことができる。 $u$  は  $x$  と  $t$  の関数であるが、弦の傾きはある瞬間  $t$  における  $x$  の微分係数に等しいので  $\partial u / \partial x$  と表される。弦の微小部分  $x \sim x + \Delta x$  の  $u$  方向の運動方程式は、弦の線密度を  $\sigma$  と表すと微小部分の質量は  $\sigma \Delta x$  であるから

$$\begin{aligned} (\sigma \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T_u(x + \Delta x, t) - T_u(x, t) \\ &= T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \end{aligned} \quad (4.80)$$

と書ける。加速度はある場所  $x$  における時刻  $t$  に関する 2 階微分なので、 $\partial^2 u / \partial t^2$  と表される。この式の両辺を質量  $\sigma \Delta x$  で割って次式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.81)$$

ただし、 $v$  は次式で表される定数である。

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (4.82)$$

式 (4.81) の形の偏微分方程式を波動方程式と呼ぶ。定数  $v$  は 4-7 節に示すように波の伝播速度である。式 (4.82) は弦を伝わる横波の速さを表す。

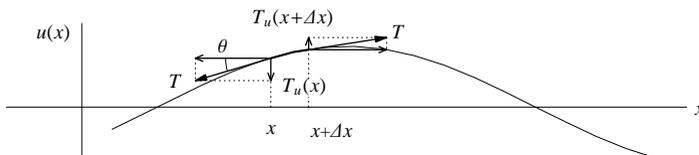


図 4-9 弦の振動

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-6 棒を伝わる縦波

(執筆者：鈴木 勝，伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

## 4-6-1 棒を伝わる縦波

細い弾性棒を伝わる縦振動(縦波)を考えよう．棒の断面積を  $S$ ，棒の密度を  $\rho$ ，ヤング率(Young's Modulus)を  $E$  とする．棒は十分に長いとし，棒の方向に  $x$  軸をとる．平衡状態において位置  $x$  にあった棒の部分の，時刻  $t$  における  $+x$ ，方向への変位を  $u(x, t)$ ，平衡状態において位置  $x + \Delta x$  にあった棒の部分の変位を  $u + \Delta u$  とする．平衡状態における棒の微小部分  $x \sim x + \Delta x$  の質量は  $\rho S \Delta x$  であるので，棒の断面に作用している引っ張り応力を  $f(x, t)$  とすると，棒の微小部分の運動方程式は

$$(\rho S \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)\} = S \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4 \cdot 83)$$

と書ける．平衡状態で長さ  $\Delta x$  の微小部分が長さ  $\Delta x + \Delta u$  になっているので，微小部分のひずみ(伸び率)は  $\Delta u / \Delta x = \partial u / \partial x$  である．棒の断面に作用している応力  $f$  は，ヤング率とひずみの積に等しい．すなわち

$$f = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4 \cdot 84)$$

と表される．この関係を式(4・83)に代入すると次式を得る．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4 \cdot 85)$$

ただし，定数  $v$  は

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4 \cdot 86)$$

である．式(4・85)は前節で導いた式(4・81)と同じであり，波動方程式である．波動方程式における定数  $v$  は波の速さを意味するから，式(4・86)は棒を伝わる縦波の速さである．

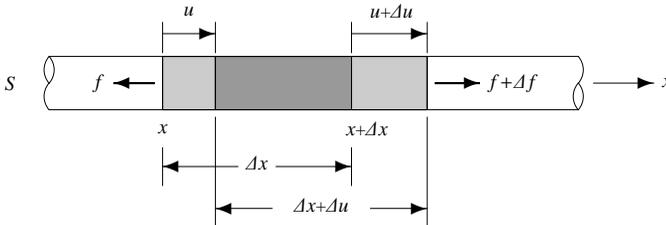


図 4・10 棒を伝わる縦振動．微小部分(長さ  $\Delta x$ )のひずみは  $\frac{\Delta u}{\Delta x}$  である．

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-7 波動方程式とその解

(執筆者：鈴木 勝，伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

## 4-7-1 波動方程式の解の特徴

前節及び前々節において導かれた波動方程式を再掲する．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4\cdot87)$$

この方程式の解の一般的な特徴を調べよう．

まず，波動方程式 (4・87) は線形である．このことは重ね合せの原理が成り立つことを意味する．すなわち，もし波動方程式の 2 つの独立な解  $u_1(x, t)$  と  $u_2(x, t)$  が存在するならば， $a_1$  と  $a_2$  を任意の定数として次の 1 次結合も方程式の解である．

$$u(x, t) = a_1 u_1(x, t) + a_2 u_2(x, t) \quad (4\cdot88)$$

次に，波動方程式 (4・87) は次のように変形できることに注意しよう．

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \mp v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0 \quad (\text{複号同順}) \quad (4\cdot89)$$

ここで，複号は同順であれば，どちらを選んでもよい．したがって

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0 \quad (4\cdot90)$$

の解は波動方程式の解である．いま， $f(s)$  を変数  $s$  の任意の一価関数とするとき

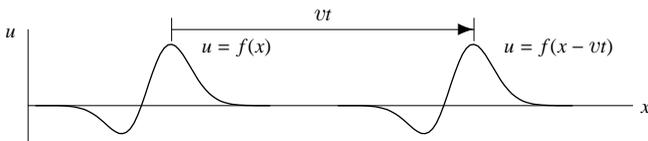
$$u(x, t) = f(x \mp vt) \quad (4\cdot91)$$

は方程式 (4・90) の解である．例えば  $s = x - vt$  とすると，次の関係が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x - vt) = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} = -v \frac{df}{ds}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x - vt) = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df}{ds} \quad (4\cdot92)$$

ゆえに， $u(x, t) = f(x - vt)$  は次の式を満足する．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4\cdot93)$$

図 4・11  $u = f(x)$  を  $+x$  方向へ  $vt$  だけ平行移動すると  $u = f(x - vt)$  となる

ところで、式  $u = f(x - vt)$  の表す曲線は  $u = f(x)$  を  $+x$  方向へ  $vt$  だけ平行移動したものである (図 4・11 参照)。すなわち、 $u(x, t) = f(x - vt)$  は一定の波形が速さ  $v$  で  $+x$  方向へ移動していることを表している。同様に、 $u(x, t) = f(x + vt)$  は速さ  $v$  で  $-x$  方向へ移動する波形を表している。以上から波動方程式 (4・87) は一定の波形が速さ  $v$  で伝わっていく現象を記述していることが分かる。波動方程式の一般的な解は次の形に表される。

$$u(x, t) = a_1 f_1(x - vt) + a_2 f_2(x + vt) \quad (4\cdot94)$$

ここで、 $a_1, a_2$  は定数である。図 4・11 のように  $f \neq 0$  の範囲が有限な波を波束という。

一端 ( $x = l$ ) が固定されている弦 ( $x \leq l$  の範囲) を  $+x$  方向に進行している波束  $f(x - vt)$  を考えよう。固定端では変位は常に 0 である。次の関数を考えよう。

$$u(x, t) = f(x - vt) - f(2l - (x + vt)) \quad x \leq l \quad (4\cdot95)$$

波束  $f(x - vt)$  (の 0 でない部分) が  $x < l$  にあるときは  $-f(2l - (x + vt))$  (の 0 でない部分) は弦の存在しない  $x > l$  にあるから  $u(x, t)$  は  $f(x - vt)$  に等しい。 $f(x - vt)$  が固定端  $x = l$  にさしかかると  $-f(2l - (x + vt))$  も逆方向から  $x = l$  に入り、 $u(l, t)$  は常に 0 に保たれる。波束  $f(x - vt)$  が  $x = l$  を通り越した後は  $x < l$  には  $-f(2l - (x + vt))$  が  $-x$  方向に進行している。 $f(x - vt)$  は固定端に入る入射波、 $-f(2l - (x + vt))$  は固定端による反射波を表している。

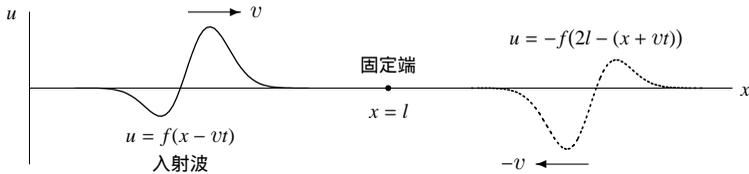


図 4・12 固定端のある弦 ( $x \neq l$ )

弦の自由端 (開放端) においては、変位の空間微分係数 ( $\partial u / \partial x$ ) が 0 である。上の場合で  $x = l$  が自由端の場合には次式で表される。

$$u(x, t) = f(x - vt) + f(2l - (x + vt)) \quad x \leq l \quad (4\cdot96)$$

通常、“波”と呼ばれるのは関数  $f$  が正弦関数あるいはその重ね合わせの場合である。最も基本的な波は次式で表されるような正弦波である。

$$u(x, t) = A \sin\{k(x - vt) + \alpha\} \quad (4\cdot97)$$

あるいは、次のようにも表される。

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \alpha) = A \sin\left\{2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - vt\right) + \alpha\right\} \quad (4\cdot98)$$

ここで、 $k$  を波数<sup>\*</sup>、 $\omega = kv$  を角振動数あるいは角周波数、 $\lambda = 2\pi/k$  を波長、 $\nu = kv/2\pi = v/\lambda$  を振動数あるいは周波数という。

\*  $k/2\pi = 1/\lambda$  も波数と呼ばれる。混同を避けるために  $k$  を角波数と呼ぶことがある。

#### 4-7-2 平面波と球面波

弦や棒を伝わる波を記述する波動方程式 (4・87) は 1 次元の波動方程式である。2 次元、3 次元空間における波動方程式はそれぞれ次式である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4\cdot99)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4\cdot100)$$

媒質が無限に広がっていて境界のことを考えなくてよい場合には、2 次元または 3 次元の波動方程式は次の正弦波の解を持つ。

$$u(\mathbf{r}, t) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (4\cdot101)$$

$$= \begin{cases} A \sin(k_x x + k_y y - \omega t + \phi) & 2 \text{次元の場合} \\ A \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi) & 3 \text{次元の場合} \end{cases} \quad (4\cdot102)$$

$$(4\cdot103)$$

ここで、 $A$  は振幅である。ベクトル  $\mathbf{k}$  を波動ベクトルといい、その大きさ  $k$  は波長や角振動数と次の関係にある。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{および} \quad k = \frac{\omega}{v} \quad (4\cdot104)$$

波の位相が一定の点は式

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi = \text{const.} \quad (4\cdot105)$$

を満たす。これは  $\mathbf{k}$  に垂直な線 (2 次元の場合) または面 (3 次元の場合) を表し、時間的には  $\mathbf{k}$  の方向に速度  $v$  で進行しており、3 次元の場合には平面波と呼ばれる。波の位相が一定の面 (等位相面) を波面 (Wave Front) という。 $v$  は波面の速度である。

原点からの距離を  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  として球対称な  $u(r, t)$  を仮定すると、波動方程式 (4・100) は 3 次元極座標を使い次のように表される。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4\cdot106)$$

この方程式が次の解を持つことは簡単に証明できよう。

$$u(r, t) = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t + \phi) \quad (4\cdot107)$$

波面  $kr - \omega t + \phi = \text{const.}$  は原点を裏心とした球面であるので、式 (4・107) は球面波を表している。

#### 4-7-3 位相速度と群速度

波長が接近した 2 つの正弦波が  $x$  方向に伝わっているとしよう。簡単のために振幅は同じ

とする。

$$u_1(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t), \quad u_2(x, t) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t) \quad (4 \cdot 108)$$

ここで、 $k_1$  と  $k_2$ 、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  はそれぞれほぼ等しいので

$$\begin{aligned} k_1 - k_2 &= \Delta k, & \omega_1 - \omega_2 &= \Delta \omega \\ \frac{k_1 + k_2}{2} &= k, & \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} &= \omega \end{aligned}$$

と置くと、2 つの波の重ねは

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2A \cos\left\{\frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta \omega t)\right\} \sin(kx - \omega t) \quad (4 \cdot 109)$$

と表される。右辺の  $2A \cos\{(\Delta k x - \Delta \omega t)/2\}$  は合成波の包絡線を表している。この包絡線の中を角周波数  $\omega$  の波が伝わる速さ

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (4 \cdot 110)$$

はこれまで扱ってきた波の速さであり、等位相面（波面）の伝わる速さであるので、位相速度と呼ばれる。一方、包絡線が移動する速さは次の  $v_g$  で表され、群速度と呼ばれる。

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} \quad (4 \cdot 111)$$

位相速度  $v_p$  が波長に依存しなければ群速度と位相速度は等しいが、波長に依存する場合には  $v_g \neq v_p$  である。一般に波の速さが波長に依存する現象を分散という。分散がある場合には、エネルギーが伝わる速さは群速度である。

図 4・13 のように時間的空間的に有限の広がりを持つ波を波束という。例えば、波の速さを測定する場合に、個々の波の山や谷を追いかけることはまれで、波束の包絡線の伝わる速さ、すなわち群速度を測定するのが通常である。

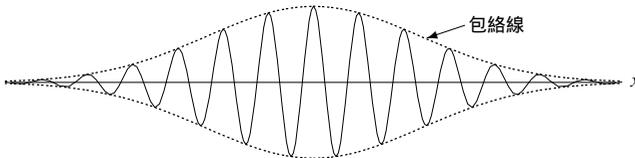


図 4・13 波 束

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-8 音 波

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

媒質中を伝わる弾性波, 特に空気中を伝わる縦波を音波 (Sound Wave) あるいは音という。人が聞くことができる音波はだいたい周波数 20 Hz ~ 20 kHz の範囲にある。それより高い周波数の音波は超音波 (Ultrasonic Wave) と呼ばれる。

## 4-8-1 音の速さ

流体中を伝わる縦波の速さは, 流体の密度  $\rho$  と体積弾性率  $K$  を使って次の式で与えられる。

$$v = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (4\cdot112)$$

ただし, 音波の伝播は断熱現象であるので, 微分係数や体積弾性率は断熱過程に対する値である。気体の断熱体積弾性率を求めよう。理想気体を仮定すると, 断熱過程においては圧力  $p$  と体積  $V$  は  $pV^\gamma = \text{const.}$  ( $\gamma$  は比熱比) に従って変化するので, 次式を得る。

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} = \gamma p \quad (4\cdot113)$$

また, 状態方程式から, 1 mol 当たりの質量を  $M$  とすると, 次の関係が成り立つ。

$$p = \frac{\rho R}{M} T \quad (4\cdot114)$$

ここで,  $R$  は気体定数である ( $R = 8.3145 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ )。以上から気体中の音速は次式で表される。

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (4\cdot115)$$

すなわち, 気体中の音速は温度の平方根に比例し, 圧力には依存しない。また, 1 mol の質量が小さな気体中ほど速い。空気中の音速を計算しておこう。乾燥空気の 1 mol 当たりの質量  $M = 28.97 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ , 比熱比  $\gamma = 1.40$  を使うと  $0^\circ\text{C}$  ( $T = 273.15 \text{ K}$ ) における音速は式 (4\cdot115) から  $v = 331.4 \text{ m/s}$  と求まる。セ氏温度  $t^\circ\text{C}$  の乾燥空気中の音速は

$$v = 331.4 \left(1 + \frac{t}{273}\right)^{1/2} \text{ m/s} \cong (331.4 + 0.61 t) \text{ m/s} \quad (4\cdot116)$$

である。ただし, 最右辺の式は  $|t| \ll 273$  の近似式である。

表 4\cdot1 気体中の音速 (水蒸気以外は  $0^\circ\text{C}$ )

気体	分子量	比熱比	速度 (m/s)
水素	2.00	1.41	1270
ヘリウム	4.00	1.66	970
水蒸気 ( $100^\circ\text{C}$ )	18.0	1.30	473
乾燥空気	29.0	1.40	331
アルゴン	40.0	1.67	309
炭酸ガス	44.0	1.30	258

液体の場合には、断熱体積弾性率と等温体積弾性率はほとんど差がなく、また室温付近ではほぼ定数である。水中の音速は、体積弾性率  $K = 2.24 \times 10^9$  Pa、密度  $\rho = 1.00 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> を式 (4-112) に代入すると  $v = 1500$  m/s を得る。

いくつかの気体中における音速を表 4-1 に掲げる。

#### 4-8-2 音の強さと大きさ

一般に波の強さは、単位時間あたりに単位面積あたりを通過する波のエネルギーで表される。媒質の変位が  $u(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  で表される平面進行波を考えよう。媒質の単位体積あたりのエネルギー  $w$  は、運動エネルギーと位置エネルギー（弾性エネルギー）を加えて

$$w = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} K \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (4-117)$$

ただし、体積弾性率  $K$  と波の速さ  $v$  との間に成り立つ関係  $K = \rho v^2$ 、及び角周波数  $\omega$  と  $k$  の関係  $\omega = kv$  を使った  $\rho$  は媒質の平衡状態における密度である。単位時間あたりに単位面積あたりを通過するエネルギーは  $wv$  に等しいので、波の強さ  $I$  は

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad (4-118)$$

と表される。音の強さを表すときには通常、変位の振幅  $A$  より音圧（圧力の変動部分）の振幅  $\Delta p_{\max}$  が使われる。音波は疎密波ともいわれる通り、音が伝わっているとき密度は  $\Delta \rho = -\rho(\partial u / \partial x)$  に従って変動している。このとき、圧力の変動  $\Delta p$  は次式で表される。

$$\Delta p = \frac{dp}{d\rho} \Delta \rho = v^2 \Delta \rho = -\rho v^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho v^2 k A \cos(kx - \omega t) \quad (4-119)$$

したがって、音圧の振幅は変位の振幅と  $\Delta p_{\max} = \rho v^2 k A = \rho v \omega A$  の関係にある。音の強さは音圧の振幅  $\Delta p_{\max}$  あるいは音圧の実効値\*  $\Delta p_{\text{eff}} = \Delta p_{\max} / \sqrt{2}$  を使うと次式で表される。

$$I = \frac{\Delta p_{\max}^2}{2\rho v} = \frac{\Delta p_{\text{eff}}^2}{\rho v} \quad (4-120)$$

基準の強さ  $I_0 = 10^{-12}$  W/m<sup>2</sup> に対する音の強さの比の常用対数を 10 倍した値を音の強さのレベルといい、デシベル (Decibel, 記号 dB) を付けて表す。

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \text{ dB} \quad (4-121)$$

この  $I_0$  の値は、耳の感度の良い周波数における最小可聴音の強さにだいたい等しい。あるいは、 $I_0$  に対応する音圧の実効値  $\Delta p_0 = 2.0 \times 10^{-5}$  Pa を用いると次式で表される。

$$L_p = 10 \log_{10} \left( \frac{\Delta p_{\text{eff}}}{\Delta p_0} \right)^2 \text{ dB} = 20 \log_{10} \frac{\Delta p_{\text{eff}}}{\Delta p_0} \text{ dB} \quad (4-122)$$

\* 実効値とは 2 乗の平均値である。通常はこの実効値を“音圧”という。

ところで，人間の聴覚の感度は音波の周波数に依存する．人が聞くことのできる音の周波数範囲はだいたい 20 Hz から 20 kHz にあるが，聴覚の感度が最も良いのは 3~4 kHz の周波数域である．ある周波数の音を耳で聞いたときに，それと大きさ（Loudness）が同じと判断される 1000 Hz の音波の強さのレベルを音の大きさのレベル（Loudness Level）と定義し，フォン（Phon）を付けて表す．純音に関して，音の大きさのレベルと周波数，音圧のレベルとの関係は図 4・14 に示す音の等感曲線（等ラウドネス曲線）によって表される．私たちの普

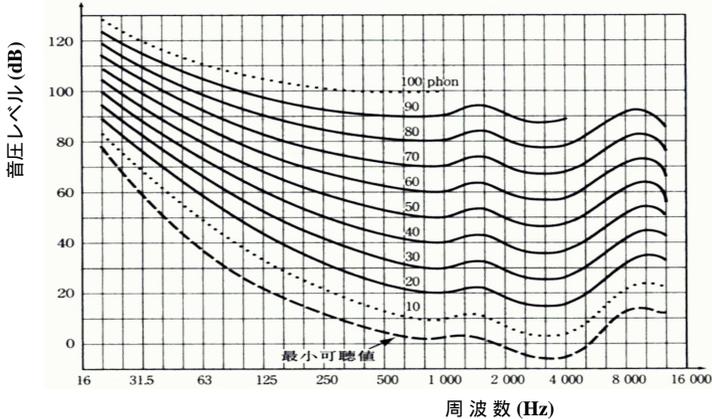


図 4・14 音の大きさの等感曲線<sup>1)</sup>．数字は音の大きさのレベル（フォン）．

通の会話は 60 フォン程度で，音の強さで表すと  $10^{-5} \text{ W/m}^2$  である．最小可聴音は 4 フォン，耳が痛くなる限界の大きさはおよそ 130 フォンである．人間の耳が 4 フォンから 130 フォン近くまで，音の強さの比にして  $10^{12}$  もの範囲を知覚するということは感嘆に値する．

### 4-8-3 音の高さ

音の高さ（Tone Pitch）は基本的には音の周波数による．周波数が大きければ高く，小さければ低い．しかし，周波数が同じでも，音の強さや継続時間が違うと違った高さに聞こえる場合もあり，一義的に周波数で決まるわけではない．多くの周波数成分を含む複合音の場合には更に複雑であるが，だいたい最も強い周波数成分によって決まるといってよいだろう．しかし，楽器の音のように基本音とその倍音からなる場合には，音の高さは通常基本振動数によって決まり，倍音や 3 倍音が基本音よりも強くても基本音の高さに聞こえる．

楽器の音は，八長調のラ（正確には イ または  $a^1$ ）の音を 440 Hz と定め，半音の差を周波数比  $2^{1/12}$  とする 12 平均律に従うことが国際的に決められている．全音の差は周波数比

表 4・2 楽音の周波数（単位 Hz）

階名	周波数	比	階名	周波数	比	
do	( $c^1$ )	261.63	1	sol	( $g^1$ )	$2^{7/12}$
re	( $d^1$ )	293.66	$2^{2/12}$	la	( $a^1$ )	$2^{9/12}$
mi	( $e^1$ )	329.63	$2^{4/12}$	si	( $b^1$ )	$2^{11/12}$
fa	( $f^1$ )	349.23	$2^{5/12}$	do	( $c^2$ )	2

$2^{1/6} \cong 1.12246$ , 1 オクターブの差は周波数比 2 である。c<sup>1</sup> と c<sup>2</sup> の間の八長調のドレミの音の周波数を表 4・2 に掲げる。

#### 4-8-4 ドップラー効果

波源と観測者が相互に運動しているときには、観測者の受け取る波の周波数は、波源も観測者も静止している場合とは異なる。この現象をドップラー効果 (Doppler Effect) という。ドップラー効果はあらゆる波動現象において観測されるが、以下では音波を想定して解説する。

音源が運動し観測者が静止している場合

最初に周波数  $\nu$  の音源が静止している観測者に近づく場合を考えよう。音源の速度  $v_s$  は音速 (位相速度)  $v$  より小さいとする。はじめ O にあった音源から出た波は、時間  $t$  の間に  $v_s t$  だけ進む。この間に音源は  $\nu t$  周期の波を送り出し、自身も  $\nu t$  だけ進む。このとき、観測者の受け取る音波の波長は、図 4・15 から分かるように

$$\lambda' = \frac{\nu t - v_s t}{\nu t} = \frac{v - v_s}{\nu} \quad (4 \cdot 123)$$

であり、観測される音波の周波数は

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_s} \nu \quad (4 \cdot 124)$$

となる。音源が観測者から遠ざかるときには  $v_s < 0$  ととればよい。なお、音源の運動方向が、音源と観測者を結ぶ線に対して角度  $\theta$  をなす場合には、上式の  $v_s$  は、観測者の方向への速度成分  $v_s \cos \theta$  に置き換える。もし、音源が観測者の方向に対して直角に運動しているならば  $\nu' = \nu$  であり、ドップラー効果は観測されない。

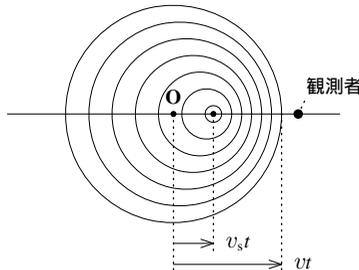


図 4・15 距離  $v_s t - \nu t$  の間に  $\nu t$  周期の波が入る。

観測者が運動し音源が静止している場合

次に、観測者が静止している音源に向かって速さ  $v_p$  で近づく場合を考えよう。この場合には時間  $t$  の間に観測者は、距離  $\nu t + v_p t$  の間にある波を観測する。波長を  $\lambda$  とすると、波の振動の数は  $(\nu t + v_p t)/\lambda$  である (図 4・16 参照)。この数は、観測される周波数  $\nu'$  と時間  $t$  の積  $\nu' t$  に等しい。したがって、次の関係を得る。

$$\nu' = \frac{\nu + v_p}{\lambda} = \frac{\nu + v_p}{v} \nu \quad (4 \cdot 125)$$

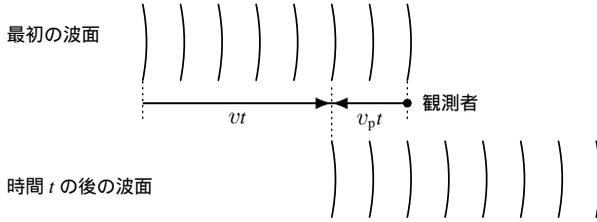


図 4-16 観測者が静止波源に向かって移動する場合．観測者は距離  $(v + v_p)t$  の間に入る波を観測する．

#### 音源も観測者も運動している場合

音源と観測者が 1 直線上を運動している場合には，観測される周波数は次の式で与えられる．ただし， $v_s, v_p$  は，共に相手に近づいている場合に正，相手から遠ざかっている場合に負とする．

$$v' = \frac{v + v_p}{v - v_s} v \quad (4-126)$$

#### 4-8-5 超音速と衝撃波

音源の速さが音速より大きくなると式 (4-124) はもはや成り立たない．この場合には図 4-15 に相当する図を描くと図 4-17 のようになる．この図で V 字状をなす波面の包絡線は 3 次元空間では円錐である．円錐の半頂角  $\alpha$  は次の式で与えられる．

$$\sin \alpha = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{M} \quad (4-127)$$

ここで，音源の速度と音速との比  $M = v_s/v$  をマッハ数 (Mach Number)，角度  $\alpha$  をマッハ角という．この円錐表面が通過するとき，極めて急速な圧力の上昇と下降が生じる．この円錐表面に伴う波を衝撃波 (Shock Wave) といい，物体が超音速で運動するときには常に発生する．

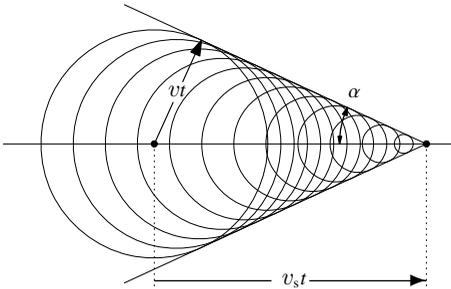


図 4-17 音源の速さ  $v_s$  が音速  $v$  より速いと衝撃波が発生する．

#### 参考文献

- 1) 国立天文台 (編)：“理科年表”物 78, 「音の大きさの等感曲線」丸善出版, 2013.

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-9 光 波

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

波が障害物に当たるとき、波は障害物の裏側に入り込む。この現象を波の回折という。また、複数の波が重ね合って強め合ったり弱め合ったりする現象を干渉という。光は電磁波であり、波に特徴的な回折、干渉現象を起こす。これが光の波動説の根拠であった。

## 4-9-1 光 波

電磁気学の基本方程式を導いたマクスウェルは、理論的な考察から光が電磁波であることを示した。電磁波は波長の長さによって表 4-3 のように分類されている。“光”とは最も狭い意味では“可視光”を、もう少し広い意味では赤外線から紫外線ないし X 線まで含むが、最も広い意味では 線も電波も含めて電磁波と同義に用いられる。

表 4-3 電磁波の波長による分類。

電磁波	およその波長域	細分類 (長波長から短波長へ)
電波	0.1 mm 以上	長波、中波、短波、超短波、マイクロ波
赤外線	100 μm ~ 700 nm	遠赤外、近赤外
可視光	700 nm ~ 400 nm	赤、橙、黄、緑、青、紫
紫外線	400 nm ~ 10 nm	近紫外、真空紫外、極端紫外
X 線	10 nm ~ 10 <sup>-3</sup> nm	軟 X 線、硬 X 線
γ 線	10 <sup>-2</sup> nm 以下	

X 線は、内殻電子のエネルギー準位間の遷移に伴って発せられる

γ 線は、原子核のエネルギー準位間の遷移に伴って発せられる。

光 (電磁波) は音波や弾性波などと違って伝播する媒質を必要としない。空気やガラスなどの媒質中も伝わるが、真空中でも伝播する。真空中の光の速さは物理学における最も基本的な普遍定数の一つであり、現在では

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (4-128)$$

と定義されている。一樣な媒質中を光が伝わる速さを  $c'$  とするとき

$$n = \frac{c}{c'} \quad (4-129)$$

を媒質の屈折率という。空気中では空気の屈折率  $n_{\text{air}}$  との比が問題となるが、空気 (1 atm, 0°C) の屈折率は 1.000292 (波長 589 nm における値) であるので 3 桁までの精度では真空中の屈折率と区別する必要はない。しかし、それ以上の精度が要求される場合には、式 (4-129) で定義される  $n$  を絶対屈折率、 $n/n_{\text{air}}$  を空気に対する相対屈折率と呼ぶ。

屈折率は波長で変化する。この現象を光の分散という。通常の媒質では、波長を  $\lambda$  とすると、可視光の屈折率は近似的に次の式で表される。

$$n = n_0 + \frac{A}{\lambda - \lambda_0} \quad (4-130)$$

ここで、 $n_0$ ,  $A$ ,  $\lambda_0$  は媒質によって決まる定数である。この式をハルトマン (Hartmann) の

分散式という。

マクスウェルの電磁気学の理論により光は周波数と波長が定義できる電磁波であることが理論づけられたが、物質と相互作用するときには光は粒子として振る舞うことがアインシュタインにより提唱された。量子理論によれば周波数  $\nu$ 、波長  $\lambda$  の光はエネルギー  $E = h\nu$ 、運動量  $p = h/\lambda$  の粒子として振る舞うことが知られている。ここで、 $h$  はプランク定数で、その値は  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  J·s である。

#### 4-9-2 ホイヘンスの原理

光の波動理論を最初に展開したのはホイヘンスである\*。ホイヘンスが提唱した原理は光の回折現象だけでなく、光の反射、屈折の現象も説明することができ、電磁気学の立場からも理論づけられている。

ホイヘンスの原理：ある時刻における波面上の各点が新しい波源となって 2 次波（素元波）を出し、それらの重ねせとして前面に作られる包絡面が次の波面となる。

このホイヘンスの原理より屈折の法則を説明してみよう。異なる媒質の境界面に平面波が入射するとする。各媒質中における波の位相速度を  $c_1, c_2$ 、波の進行方向と境界面の法線のなす角を  $\theta_1, \theta_2$  とする。ある瞬間の波面を AB として、この波面上の各点から発せられた 2 次波が、時間  $t$  後に作る球面波の包絡線を CD とする。図 4-18 から明らかなように

$$\overline{BD} = \overline{AD} \sin \theta_1 = c_1 t \quad \text{および} \quad \overline{AC} = \overline{AD} \sin \theta_2 = c_2 t \quad (4 \cdot 131)$$

であるから次の式を得る。

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (4 \cdot 132)$$

または、屈折率  $n_1, n_2$  を使えば  $c_1 n_1 = c_2 n_2$  (=真空中の光速) であるから、次の屈折の法則（スネルの法則）を得る。

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (4 \cdot 133)$$

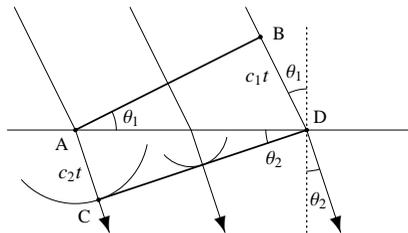


図 4-18 ホイヘンスの原理と屈折の法則

\* ホイヘンス (C. Huygens, 1629–1695)

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-10 幾何光学

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

波の波長が障害物に比べてずっと小さい場合には、障害物の裏側に波が入り込む効果はほとんど問題にならない。波に固有な回折効果が無視できる時、波の伝播は幾何学的に考えることができる。光は電磁波であるが、可視光の波長は 1/1000 mm 以下であって身の回りの物体の寸法に比べるとはるかに小さい。それゆえ、通常は光の回折効果は無視でき、光の進路を幾何学的な線（光線）として扱うことができる。これが幾何光学であり、カメラ、望遠鏡、顕微鏡などの光学機器の基礎となっている。歴史的にはこのような光の直進性が光の粒子説が支持された由縁であった。

## 4-10-1 フェルマの原理

光が空間のある点から別な点まで進む経路は、光が 2 点間を進行するのに要する時間が最小となる経路である。光速度  $c$  と屈折率  $n$  の関係式 (4・129) を使い、経路に沿った長さを  $s$  として線積分を使って表すと、光が実際に通る道筋は

$$\int_C n ds \quad (4\cdot134)$$

を最小とする経路  $C$  である。これは幾何光学の基本定理であり、フェルマの原理 (Fermat's Principle) と呼ばれる。屈折率と経路長との積の和 (4・134) を光学距離という。

## 4-10-2 反射と屈折の法則

屈折率が  $n_1$  から  $n_2$  へ不連続に変化する境界面に光が入射するとき、光の反射と屈折を生じる。入射光、反射光、屈折光の伝播方向と境界面の法線のなす角度をそれぞれ入射角  $\theta_1$ 、反射角  $\theta'_1$ 、屈折角  $\theta_2$  と呼ぶ。フェルマの原理からも反射の法則、屈折の法則を導くことができる。

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (4\cdot135)$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (4\cdot136)$$

式 (4・135) は反射の法則、式 (4・136) は屈折の法則を表す。屈折の法則はスネルの法則 (Snell's Law) とも呼ばれる。

反射の法則をフェルマの原理から導くことは容易である。図 4・19(a) において、点 A から境界面の点 P を通り点 B に到る経路を考える。AP, BP とも屈折率が一樣な媒質中にあるので、2 つの線分の長さの和が最小となる P の位置を求めればよい。それは P が AB' (B' は B の鏡像点) の上の点 O に一致するときで、このとき  $\theta_1 = \theta'_1$  である。

次に屈折の法則を導いてみよう。図 4・19(b) の点 A から境界面の点 P を通り点 B に到る経路を考える。図のように A, P, B の座標点をとると、屈折率が  $n_1$  と  $n_2$  の媒質中の経路の長さはそれぞれ  $\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}$ 、 $\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}$  であるから、フェルマの原理により

$$\int_C n ds = n_1 \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2} \quad (4\cdot137)$$

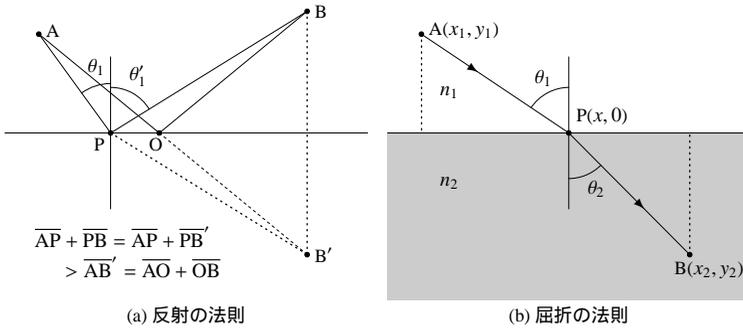


図 4・19 反射，屈折の法則の導出

を最小とする経路を求めればよい．上式を  $x$  で微分して 0 とおくと

$$n_1 \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - n_2 \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0 \tag{4・138}$$

を得る．この式の分数は，それぞれ  $\sin \theta_1, \sin \theta_2$  に等しいから式 (4・136) を得る．

全反射

屈折率の大きな物質から小さな物質へ光が入射するとき ( $n_1 > n_2$ )

$$\sin \theta_{cr} = \frac{n_2}{n_1} \tag{4・139}$$

を満たす角度  $\theta_{cr}$  より大きな入射角に対しては，屈折角は存在しない．この場合には，光はすべて反射される．この現象を全反射といい， $\theta_{cr}$  を全反射の臨界面角という．

4-10-3 球面鏡における反射

球面鏡における光の反射について調べよう．図 4・20 の点 A から出た光線が半径  $R$  の凹面鏡（球面の曲率中心 C）の点 P で反射され，AC を結ぶ直線上の点 B を通るとする．AC の延長線と球面の交点を O とする．点 P は（半径  $R$  に比べて）点 O に十分近いとする．点 O から点 A, B までの距離をそれぞれ  $a, b$ ，また AP, CP, BP が直線 CO（光軸という）となす角度を  $\theta, \varphi, \theta'$  とすると，これら角度は小さいので  $\tan \theta \cong \theta$  などの近似を使って

$$a\theta = R\varphi = b\theta' (= \overline{PO}) \tag{4・140}$$

を得る．このような光線の扱いを近軸光線の近似という．反射の法則により角度  $\angle APC = \varphi - \theta$ ， $\angle BPC = \theta' - \varphi$  は等しいので

$$\varphi - \theta = \theta' - \varphi \quad \text{すなわち} \quad \theta + \theta' = 2\varphi \tag{4・141}$$

である．この式と式 (4・140) から次の関係式を得る．

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \text{ただし} \quad f = \frac{R}{2} \tag{4・142}$$

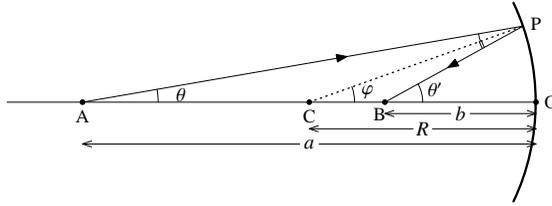


図 4・20 球面鏡

ここで、 $f = R/2$  を球面鏡の焦点距離という。無限遠 ( $a \rightarrow \infty$ ) から来る、軸に平行な光線は光軸上点 O から距離  $f$  離れた点 (焦点) を通る。 $a < f$  の場合には  $b < 0$  となるが、これは光軸上 O から  $|b|$  だけ離れた鏡の背後 (図 4・20 では球面の右側) の点から出たような光線であることを意味する。凸面鏡の場合には、 $R < 0$  ととれば式 (4・142) はそのまま適用できる。

#### 4-10-4 球面境界における反射と屈折

次に、屈折率の異なる球面境界における屈折を調べよう。図 4・21 のように屈折率  $n_1, n_2$  の媒質の境界が半径  $R$  の球面 (曲率中心 C) とする。C と境界面の中央 O を結ぶ光軸上の点 A を出た光線が球面上の P で屈折する。屈折光線の延長線が光軸と交わる点を B とする。点 O から A, B までの距離をそれぞれ  $a, b$  とする。点 P は光軸に十分近いと仮定し、すべての光線は近軸光線として扱う。AP, BP, CP が光軸となす角度  $\theta, \theta', \varphi$  (図 4・21 参照) はいずれも小さいので前節の式 (4・140) と同様な近似式

$$a\theta = b\theta' = R\varphi (= \overline{PO}) \quad (4\cdot143)$$

が成り立つ。境界面上の点 P に入る光線の入射角は  $\angle APC = \varphi - \theta$ 、屈折角は  $\angle BPC = \varphi - \theta'$  に等しい。 $\sin(\varphi - \theta) \cong \varphi - \theta$  等の近似が成り立つので、屈折の法則より次の関係式を得る。

$$n_1(\varphi - \theta) = n_2(\varphi - \theta') \quad \text{すなわち} \quad n_1\theta - n_2\theta' = (n_1 - n_2)\varphi \quad (4\cdot144)$$

この式と式 (4・143) の関係から次の式を得る。

$$\frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad (4\cdot145)$$

次に、屈折率  $n_1$  の媒質中に置かれた屈折率  $n_2$  のレンズを考えよう。レンズの両面の曲率半径を  $R_1, R_2$  とする。式 (4・145) における  $R, a, b$  は、最初の境界面に対して  $R_1, a, b'$ 、第 2 の境界面に対して  $R_2, a', b$  とおいて次の関係を得る。

$$\frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{b'} = \frac{n_1 - n_2}{R_1}, \quad \frac{n_2}{a'} - \frac{n_1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R_2} \quad (4\cdot146)$$

ただし、第 2 の境界面では屈折率の順序が逆になることに注意されたい。レンズの厚みが無

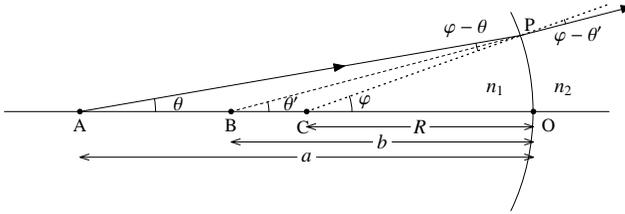


図 4・21 屈折率の異なる球面境界

視できる薄肉レンズの場合には  $b' = a'$  であるから次の関係を得る .

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{4・147}$$

ただし

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \tag{4・148}$$

式 (4・147) はレンズの公式と呼ばれ, 式 (4・148) で与えられる  $f$  は薄肉レンズの焦点距離と呼ばれる . 式 (4・147) において  $a, b$  はともにレンズの左側 (入射側) への距離を正, 右側への距離を負ととる\* . また, 式 (4・148) において, 曲率半径  $R_1, R_2$  は入射側から見て凹面の場合には正, 凸面の場合には負ととる . 両凸レンズの場合には  $R_1 < 0, R_2 > 0$  である .  $f > 0$  は凸レンズ,  $f < 0$  は凹レンズである . レンズから左右に  $|f|$  離れた点をレンズの焦点という .

式 (4・147) によれば,  $f > 0$  の場合には,  $a = \infty$  のとき  $b = -f$ , すなわち無限遠から来る平行光線はレンズの右側の焦点に集まり,  $a = f$  のとき  $b = \pm\infty$ , すなわちレンズの左側の焦点から出た光線はレンズの右側では平行光線になる . なお, レンズの中心を通る光線は直進する . 図 4・22 は  $R_1 > 0, R_2 < 0$  の凸レンズ ( $f > 0$ ) によって物体の実像ができる場合 ( $a > f, b < -f$ ) である .  $F, F'$  はレンズの焦点の位置である .

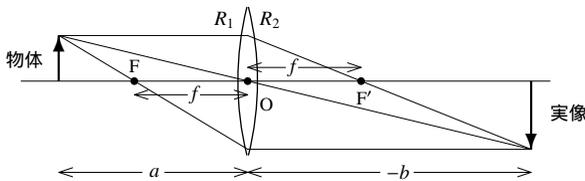


図 4・22 薄肉の凸レンズによる結像 (実像の場合)

\*  $b$  はレンズの右側への距離を正ととることもある . この場合には, レンズの公式は  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  となる .

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-11 光の干渉

(執筆者：鈴木 勝，伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

2 つの波を重ねると、位相がそろっているところでは強め合い、位相が逆なところでは弱め合う。これが干渉と呼ばれる現象である。2 つのスリットによって回折された光波の干渉実験は 19 世紀初頭にヤングによって行われ、光の波動説の基礎となった実験であり、ヤングの干渉実験と呼ばれている\*。

## 4-11-1 ヤングの干渉実験

2 つのスリット  $S_1, S_2$  を照射する光波をそれぞれ次式で表そう (図 4・23 参照)。

$$u_1(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_1), \quad u_2(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_2) \quad (4 \cdot 149)$$

初期位相  $\phi_1, \phi_2$  の違いを考えだが、平面波がスリット面に垂直に (波面がスリット面に平行に) 入射する場合には  $\phi_1 = \phi_2$  である。スリットから干渉を観測するスクリーン上の点 P までの距離を  $r_1, r_2$  とすると、点 P における光波は次式で表される。

$$u(t) = A \sin(\omega t - kr_1 + \phi_1) + A \sin(\omega t - kr_2 + \phi_2) \quad (4 \cdot 150)$$

ただし、 $r_1$  と  $r_2$  の差は小さいとして 2 つのスリットを通して P 点に到った光波の振幅は等しいとした。三角関数の和を積の形に書き換えて

$$u(t) = 2A \cos\left(\frac{r_2 - r_1}{2}k - \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{r_2 + r_1}{2}k + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right) \quad (4 \cdot 151)$$

を得る。t を含まない因子が点 P における振幅であり、2 つのスリットからの距離の差 (光路差)  $r_2 - r_1$  とスリットに入る光波の位相差  $\phi_2 - \phi_1$  によって決まる。光の強度 I は振幅の 2 乗に比例するので、点 P の強度は

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{r_2 - r_1}{2}k - \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \quad (4 \cdot 152)$$

と表せる。 $I_0$  は強度の最大値である。2 つのスリットの間を距離を  $d$ 、スリットからスクリー

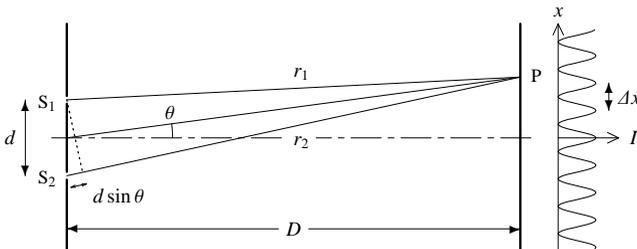


図 4・23 ヤングの干渉実験

\* ヤング (Thomas Young, 1773–1829.)

ンまでの距離を  $D$  , スクリーンの中央から点 P までの距離を  $x$  としよう . 通常の実験条件では  $d \ll D$  ,  $x \ll D$  であるので次式が成り立つ .

$$r_2 - r_1 \cong d \sin \theta \cong \frac{d}{D} x \quad (4.153)$$

以上から次の結果を得る . ただし ,  $k = 2\pi/\lambda$  の関係を使って波長  $\lambda$  で表した .

$$I(x) = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda D} x - \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \quad (4.154)$$

スリットに入射する光波がスリット面に平行な波面の平面波である場合には , 位相  $\phi_1, \phi_2$  は等しく , この場合には光路差が波長の整数倍となる .

$$r_2 - r_1 = \frac{d}{D} x = m\lambda, \quad m : \text{整数} \quad (4.155)$$

において干渉光の強度は最大となる . スクリーン上の強度は正弦的に変化し , 縞模様が観測される . この干渉縞の間隔  $\Delta x$  は次式で与えられる .

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d} \quad (4.156)$$

実際の光源からの光は , 位相が短時間の間に不規則に変化している . 光波の位相が一定である時間間隔の平均値をコヒーレンス時間 , その間に光が進む距離をコヒーレンス長という . コヒーレンス時間は , 原子のスペクトルランプからの光で数 10 ns (  $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$  ) , 通常のレーザー光では  $\mu\text{s}$  ないし  $\text{ms}$  の程度である . 2 つのスリットを照射する光波が異なる光源から来る場合には , 位相差  $\phi_2(t) - \phi_1(t)$  は時間的にランダムに変化するのでスクリーン上の強度は平均化されて様となり , 干渉は観測されない . 一般に点光源から出た光を 2 つに分け , 異なる光路を経て再び重ね合わせる場合に , 光路差がコヒーレンス長よりも短ければ干渉を観測することができる . 干渉を観測できる光波はコヒーレントであるという . 通常は , “コヒーレントな光” とはコヒーレンス時間の長いレーザー光を意味する .

#### 4-11-2 薄膜による干渉

薄膜による干渉を調べよう . 厚さ  $d$  の薄膜 ( 周囲に対する相対屈折率  $n$  ) に平行光線が入射するとき ( 図 4-24 参照 ) , 表面で反射した光と薄膜内に入り裏面で反射し表面から出てくる光との干渉を考える . 重ね合わせられる光の光学距離の差 ( 光路差 ) は  $n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{A'C}$  である . 入射角を  $\theta$  , 屈折角を  $\varphi$  とすると次の関係がある .

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{2d}{\cos \varphi} \quad (4.157)$$

$$\overline{A'C} = \overline{AC} \sin \theta = 2 \overline{AB} \sin \varphi \sin \theta = \frac{2d}{\cos \varphi} \sin \varphi \sin \theta \quad (4.158)$$

屈折の法則  $\sin \theta = n \sin \varphi$  を用いると光路差は

$$n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{A'C} = \frac{2nd}{\cos \varphi} (1 - \sin^2 \varphi) = 2nd \cos \varphi \quad (4.159)$$

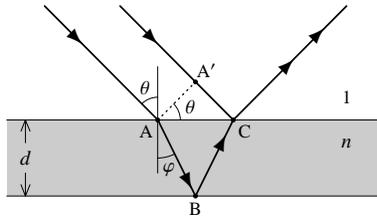


図 4・24 薄膜による光の干渉

となる．ところで，屈折率 ( $n > 1$  とする) の大きな物質との境界で反射した光線 BC は，固定端における波の反射と同様に，反射に際して位相が反転する ( $\pi$  変化する)．光路差にして  $\lambda/2$  だけずれることと同等なので，干渉して強め合う条件は次式で与えられる．

$$2nd \cos \varphi = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad (m : \text{正の整数}) \quad (4\cdot160)$$

#### 4-11-3 マイケルソン干渉計

マイケルソン干渉計\* は，光の干渉を利用した各種の計測に用いられている干渉計の一つである (図 4・25 参照)．単色な点光源またはレーザーから出た光をレンズを用いて平行光線 (光ビーム) にする．半透明鏡 (ビームスプリッタ) BS に入射した光ビームは 2 つの光ビームに分けられ，それぞれ平面鏡  $M_1$ ,  $M_2$  で垂直に反射される． $M_1$  から来て BS を透過した光と  $M_2$  から来て BS で反射した光の干渉を光検出器 D で観測する．2 つの光路の光路差  $2(l_1 - l_2)$  が波長  $\lambda$  の整数倍に等しいとき干渉した光は強め合う．このとき  $M_1$  から来て BS で反射して入射側に戻る光と  $M_2$  から来て BS を透過して入射側に戻る光は干渉して弱め合う．なお，干渉効果が観測されるためには，光路差が光ビームのコヒーレンス長よりも短くなければならない．

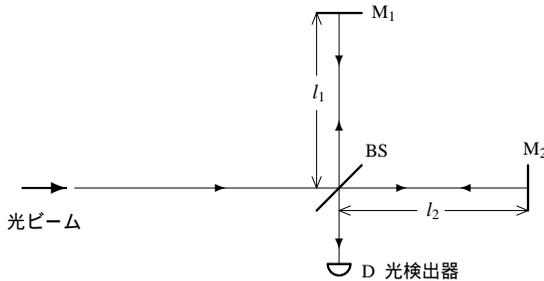


図 4・25 マイケルソンの干渉計

\* マイケルソン (A.A. Michelson, 1852–1931) が光速度の精密測定のために 1881 年に考案した干渉計．長さの精密測定などに利用される．

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-12 スリットによる回折

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

スリットの幅を考慮し、幅内の異なる地点を通過した光の重ね合わせによって十分に遠方に生じる明暗模様（回折パターン）について考察する．十分遠方で回折パターンを観察するとき、フラウンホーファー回折という．

## 4-12-1 スリットによる回折

幅  $a$  のスリットの中央  $O$  を座標原点にとり、スリットを含む面に垂直に  $z$  軸、スリットのナイフエッジに沿って  $y$  軸、これらの軸に直角に  $x$  軸をとる（図 4・26 参照）．平行光線が  $x$ - $z$  面内において  $z$  軸と角度  $\theta_0$  をなす方向からスリットに入射するとしよう．原点  $O$  に入射する光波を  $u(t) = A \sin(\omega t)$  とすると、原点から  $x$  離れた点  $Q$  に入射する光波は次の式で表せる．

$$u(x, t) = A \sin(\omega t - kx \sin \theta_0) \quad (4.161)$$

スリットから十分遠方にあるスクリーン上の点  $P$  において光の強度を観測するとしよう．原点  $O$  から観測点  $P$  までの距離を  $l$ 、 $\overline{OP}$  と  $z$  軸のなす角度を  $\theta$  とする．原点から  $P$  点まで光波が伝わる時の位相変化は  $kl$ （これを  $\phi$  と記す）、スリット上の  $x$  の地点を出た光が  $P$  点まで伝わる時の位相変化は  $k(l - x \sin \theta) = \phi - kx \sin \theta$  である．したがって、スリット上の  $x \sim x + dx$  から発せられて観測点  $P$  に到る 2 次波は

$$du \propto \sin(\omega t - kx \sin \theta_0 + kx \sin \theta - \phi) dx = \sin \{ \omega t + K(\theta) x - \phi \} dx \quad (4.162)$$

と表される．ただし

$$K(\theta) = k(\sin \theta - \sin \theta_0) = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (4.163)$$

とおいた．スリット上のあらゆる点からの光波をすべて重ね合わせよう．

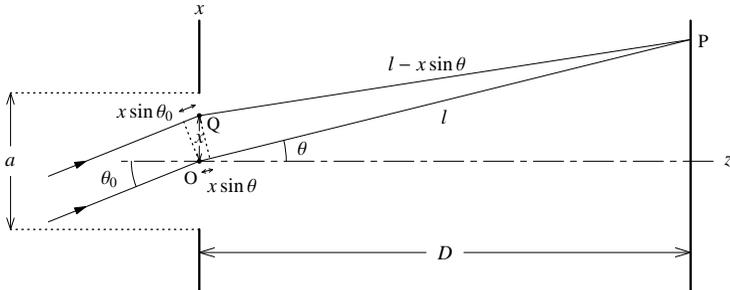


図 4・26 スリットによる回折

$$u(\theta, t) \propto \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \sin(\omega t + K(\theta)x - \phi) dx \quad (4.164)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{K(\theta)a} \left[ \cos\left\{\omega t - \frac{1}{2}K(\theta)a - \phi\right\} - \cos\left\{\omega t + \frac{1}{2}K(\theta)a - \phi\right\} \right] \\ &= \frac{\sin\{K(\theta)a/2\}}{K(\theta)a/2} \sin(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (4.165)$$

観測点 P における回折光の強度  $I(\theta)$  は次式で与えられる .

$$I(\theta) = I_0 \left| \frac{\sin\{K(\theta)a/2\}}{K(\theta)a/2} \right|^2 \quad (4.166)$$

特に光がスリットに垂直に入射する場合 ( $\theta_0 = 0$ ) には  $K(\theta) = (2\pi \sin \theta)/\lambda$  である . 更に  $\theta \ll 1$  を仮定すると  $K(\theta) = 2\pi\theta/\lambda$  なので次式を得る .

$$I(\theta) = I_0 \left| \frac{\sin(\pi a \theta / \lambda)}{\pi a \theta / \lambda} \right|^2 \quad (4.167)$$

$I_0$  は  $\theta = 0$  における強度である .  $I(\theta)$  を図 4.27 に表す . スクリーン上には縞模様が生じる . 光強度が最初に 0 となる方向の角度は

$$\theta_d = \frac{\lambda}{a} \quad (4.168)$$

である . 光のエネルギーは主に  $\theta_d > \theta > -\theta_d$  の方向に含まれる (幾何光学的には光の進行方向は  $\theta = 0$ ) . 角度  $\theta_d$  は回折による広がり角を代表する角度であるので回折角と呼ばれる .

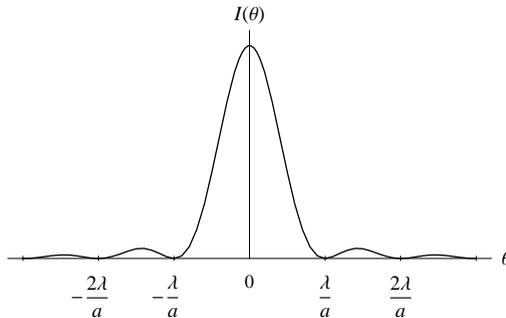


図 4.27 幅  $a$  のスリットによる回折光の強度分布

十分遠方にスクリーンを置いて観測する代わりにスリットの背後に凸レンズを置けば, 回折パターンをレンズの焦点面上で観測することができる .

口径  $d$ , 焦点距離  $f$  の凸レンズで平行光線を集光するとき, 焦点に生じる輝点の直径はおおよそ焦点距離と回折角の積  $f\lambda/d$  に等しい .

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-13 回折格子

(執筆: 鈴木 勝, 伊東敏雄) [2015 年 6 月 受領]

ガラス板などに狭い間隔で溝を刻んだ光学素子を回折格子という。構造的には多くの細いスリットを狭い間隔で平行に並べたものと同様である。回折格子の働きについて調べよう。

## 4-13-1 回折格子

図 4-28(a) のように、幅  $a$  のスリットを間隔  $d$  で  $N$  個並べた回折格子に波長  $\lambda$  の平行光線が入射角  $\theta_0$  で格子面に入射するとき、角度  $\theta$  の方向へ伝播する光波を考える。1 番目のスリットによって角度  $\theta$  方向へ伝播する光波を式 (4-165) で表そう。隣り合うスリットの中央を通過して  $\theta$  方向へ伝播する光波の位相差は  $(2\pi/\lambda)(\sin\theta - \sin\theta_0)d = K(\theta)d$  であるから、 $m$  番目のスリットによって  $\theta$  方向へ伝播する光波は次式で表される。

$$u_m(t) \propto \frac{\sin\{K(\theta)a/2\}}{K(\theta)a/2} \sin\{\omega t + K(\theta)(m-1)d - \phi\} \quad (4-169)$$

ただし、 $K(\theta)$  は式 (4-163) で与えられる。 $N$  個のスリットについて和をとれば、回折格子によって  $\theta$  方向に伝播する光波の式を得る\*。

$$u(\theta, t) \propto \frac{\sin\{K(\theta)a/2\}}{K(\theta)a/2} \sum_{m=1}^N \sin\{\omega t + (m-1)K(\theta)d - \phi\} \quad (4-170)$$

$$= \frac{\sin\{K(\theta)a/2\}}{K(\theta)a/2} \frac{\sin\{NK(\theta)d/2\}}{\sin\{K(\theta)d/2\}} \sin\left\{\omega t + \frac{N-1}{2}K(\theta)d - \phi\right\} \quad (4-171)$$

回折光の強度は振幅 ( $t$  を含まない因子) の 2 乗に比例するので、次式で表される。

$$I(\theta) = I_0 \left| \frac{\sin\{K(\theta)a/2\}}{K(\theta)a/2} \right|^2 \left| \frac{\sin\{NK(\theta)d/2\}}{\sin\{K(\theta)d/2\}} \right|^2 \quad (4-172)$$

ただし、 $I_0$  は  $K(\theta) \rightarrow 0$  のときの最大値である。式 (4-172) の因子  $\left| \frac{\sin(Ka/2)}{(Ka/2)} \right|^2$  は

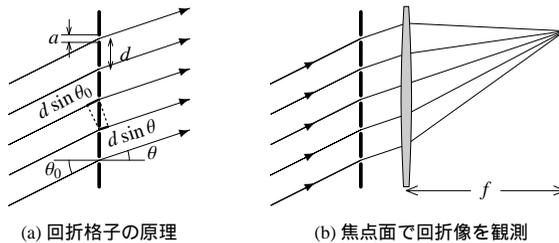


図 4-28 回折格子

\* 数学公式  $\sum_{m=1}^N \sin\{(m-1)\alpha + \beta\} = \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \sin\left(\frac{N-1}{2}\alpha + \beta\right)$

スリットの回折効果、 $|\{\sin(NKd/2)\} / \sin(Kd/2)|^2$  は多数のスリットによる干渉効果を表している。  $N$  が大きい場合には、 $K(\theta)d = 2m\pi$  ( $m$  は整数) を満たす  $\theta$  において  $I(\theta)$  は鋭いピークを生じる。  $K(\theta)$  の具体的な式 (4・163) を使うと、回折光のピークが生じる方向は

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda, \quad m \text{ は整数} \quad (4\cdot173)$$

と表される。この式は隣りあうスリットを通過する光波の光路差が波長の整数倍に等しいこと、あるいは位相差が  $2\pi$  の整数倍に等しいことを意味している。  $m$  の絶対値を回折の次数という。垂直入射 ( $\theta_0 = 0$ ) の場合に回折光の強度  $I(\theta)$  を  $\theta$  の関数として描いた一例を図 4・29 に示す。この例では 4 次の回折光は生じない。幾何光学的な透過光に対応する極大 ( $m = 0$ ) を除けば、回折光の極大の生じる方向は波長に依存する。このことを利用して、いろいろな波長成分を持つ光波の波長分布 (スペクトル) を観測することができる。

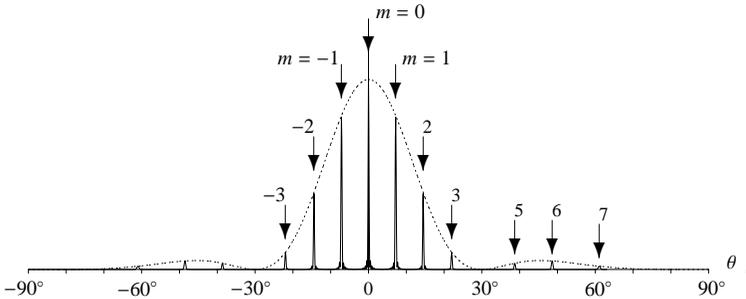


図 4・29 回折格子の  $I(\theta)$ 。垂直入射 ( $\theta_0 = 0$ )、スリット幅  $a = 2\lambda$ 、スリット間隔 (格子定数)  $d = 8\lambda$  の例。点線は幅  $a = 2\lambda$  の単スリットによる回折強度を表す。

#### 4-13-2 回折格子の分解能

単色な光が回折格子に垂直に入射する場合について、回折光の強度は

$$I(\theta) = I_0 \left| \frac{\sin(\pi a \sin\theta/\lambda)}{\pi a \sin\theta/\lambda} \right|^2 \left| \frac{\sin(N\pi d \sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi d \sin\theta/\lambda)} \right|^2 \quad (4\cdot174)$$

と表される。  $m$  次の回折光の方向を  $\theta_m$ 、この方向からずれていくとき回折光の強度が最初に 0 となる方向を  $\theta_m \pm \delta\theta$  とすると、次の式が成り立つ。

$$d \sin\theta_m = m\lambda, \quad Nd \sin(\theta_m + \delta\theta) = (Nm + 1)\lambda \quad (4\cdot175)$$

以上から  $\delta\theta \cong \lambda/Nd \cos\theta_m$  を得る。接近した 2 つの波長の回折角の差が  $\delta\theta$  より小さくなると、2 つの波長を分離することはできない。したがって、分離可能な最小の波長の差  $\Delta\lambda$  は

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{d\theta} \delta\theta = \frac{d \cos\theta_m}{m} \delta\theta = \frac{\lambda}{mN} \quad (4\cdot176)$$

である。  $\lambda/\Delta\lambda = mN$  を回折格子の分解能または解像力という。

## 12 群 - 4 編 - 4 章

## 4-14 偏 光

(執筆者：鈴木 勝, 伊東敏雄)[2015 年 6 月 受領]

真空中の電磁波は横波であり、電場または磁場の振動方向は伝播方向に対して垂直、電場と磁場の方向も互いに垂直をなす。このため、光波はその伝播方向の周りに非対称性を示す。この現象を光の“偏り”といい、偏りを示す光を偏光という。これに対して、日光や通常の照明器具からの光は偏りを示さない。このような光を自然光という。偏光と自然光の中間状態を部分偏光という。

## 4-14-1 偏光の種類

偏光の方向は電場ベクトルの方向で表す。z 方向に伝播する光波(電磁波)の電場の x, y 成分を一般に次の式で表そう。

$$E_x(z, t) = E_{0x} \sin(\omega t - kz + \phi_x) \quad (4\cdot177)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \sin(\omega t - kz + \phi_y) \quad (4\cdot178)$$

位相定数  $\phi_x$  と  $\phi_y$  が等しい ( $\phi_x = \phi_y$ ) 場合には、 $E_x$  と  $E_y$  は次の関係を満たす。

$$E_{0y}E_x = E_{0x}E_y \quad (4\cdot179)$$

この式は図 4・30(a) に示すように直線を表すので、偏光は直線偏光(あるいは平面偏光)と呼ばれる。特に、 $E_{0y} = 0$  の場合は水平偏光、 $E_{0x} = 0$  の場合は垂直偏光である。位相が等しくない ( $\phi_x \neq \phi_y, E_{0x} \neq 0, E_{0y} \neq 0$ ) 場合には、式 (4・177)、式 (4・178) から  $\omega t - kz$  を消去すると

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos(\phi_x - \phi_y) = \sin^2(\phi_x - \phi_y) \quad (4\cdot180)$$

となる。この式は図 4・30(b) に示すように楕円を表すので、偏光は楕円偏光と呼ばれる。特に、振幅が等しく ( $E_{0x} = E_{0y}$ ) かつ位相差が  $\pi/2$  の場合には式 (4・180) は円となり、円偏光と呼ばれる。  $\phi_x - \phi_y = \pi/2$  の場合に左円偏光、  $\phi_x - \phi_y = -\pi/2$  の場合に右円偏光という。

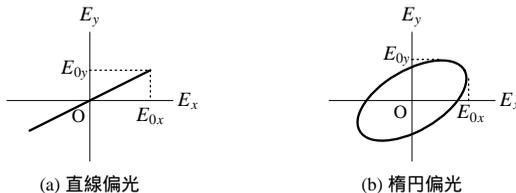


図 4・30 電場ベクトルの軌跡

普通の光源から出る光は偏光方向が短時間(発光原子の励起状態の寿命程度)でランダムに変化しているので、通常の観測ではあらゆる方向の偏光が均等に含まれ、“偏り”は観測さ

れない\* . このような光波が自然光である .

#### 4-14-2 偏光子

自然光や楕円偏光から直線偏光成分を取り出す装置を偏光子という . 偏光子は , 特定の方向に振動する直線偏光だけを通す ( 図 4・31(a) 参照 ) . 自然光の強度を  $I_0$  とするとき通過した直線偏光の強度は  $I_0/2$  である .

直線偏光が偏光子に入るとき , 偏光子を通り抜けた光は偏光子の透過軸方向の直線偏光となる ( 図 4・31(b) 参照 ) . 入射する直線偏光の振幅を  $E_0$  , その偏光方向と偏光子の透過軸方向のなす角度を  $\theta$  とすると , 通過した直線偏光の振幅は  $E_0 \cos \theta$  となる . 偏光子を光軸の周りに回転するとき , 通過する直線偏光の強度は  $I = I_0 \cos^2 \theta$  に従って変化する (  $I_0$  は入射直線偏光の強度 ) . 逆に , 偏光子を回転したとき通過した直線偏光の強度が  $\cos^2 \theta$  に従って変化するなら入射光は直線偏光であり , 強度が 0 となるとき偏光子の透過軸方向は偏光方向と直角をなす . このように , 光波が直線偏光かどうか , 直線偏光であるとすれば偏光方向はどちらかを検出するために使われる偏光子を “ 検光子 ” という .

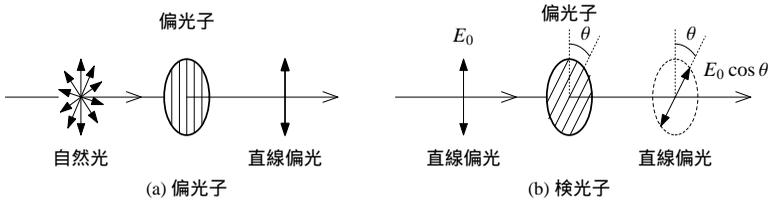


図 4・31 偏光子の働き

光が異なる媒質の境界面に入射するとき , 境界面の法線方向と光の進行方向を含む面を入射面と呼び , 入射面に平行な偏光成分を p 偏光 , 入射面に垂直な成分を s 偏光と呼ぶ ( 図 4・32 参照 ) \* . p 偏光と s 偏光では反射率が異なり , 図 4・32 の下側媒質の相対屈折率を  $n$  とするとき , 入射角 (= 反射角)  $\theta$  が

$$\tan \theta_B = n \quad (4\cdot181)$$

を満たす  $\theta_B$  に等しいとき , p 成分の反射率は 0 となり , 入射光が自然光でも反射光は直線偏光 ( s 偏光 ) となる . この角度をブリュースター ( Brewster ) 角という . このとき反射光と屈折光は直角をなす .

\* レーザーからの光は偏光であることも , 偏光でないことも , 部分偏光のこともある .

\* s, p はドイツ語の Senkrecht ( 垂直 ) , Parallel ( 平行 ) に由来する .

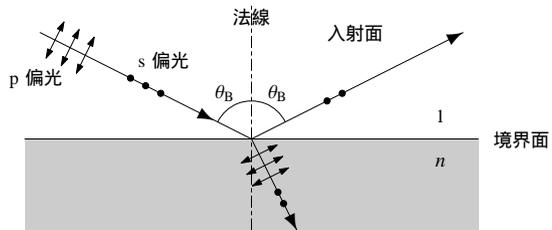


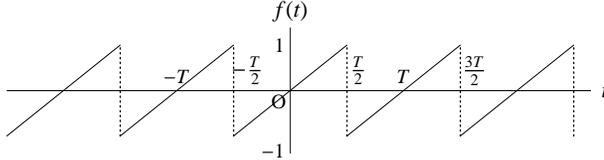
図 4・32 p 偏光と s 偏光．境界面の法線と入射光線を含む面が入射面（図では紙面）．

## 12 群 - 4 編 - 4 章

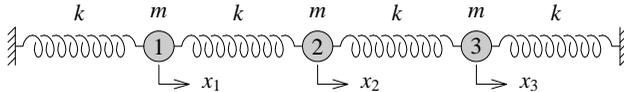
## 4-15 演習問題

(執筆者：鈴木 勝，伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

1. 次の図に示すような周期関数のフーリエ級数展開式を求めよ。



2. 一端を固定されたバネ (バネ定数  $k$ ) につながれて水平な直線上を運動する質点 (質量  $m$ ) に外力  $A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$  が作用するときの運動を求めよ。ただし、質点は速度に比例する抵抗力  $-cv$  を受けるとする。
3. 図のように質量  $m$  の 3 個の質点を滑らかな水平面上に置き、バネ定数  $k$  の 4 本のバネで直線的に連結した。全体の両端は固定されている。質点はこの直線上を微小振動するものとし、その釣り合いの位置からの変位を  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とする。
- (1) 各質点の運動方程式を示せ。
- (2)  $x_i = A_i \cos \omega t$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とおき ( $t$  は時間), 3 つの固有振動数を計算せよ。



4. 一直線 ( $x$  軸) に張った十分に長い針金を  $-x$  方向に振幅  $a = 2 \text{ cm}$ 、波長  $\lambda = 20 \text{ cm}$ 、周波数  $f = 400 \text{ Hz}$  の横波が伝わっている。
- (1) 針金の  $x$  軸からの変位  $y$  を位置座標  $x$  と時刻  $t$  の関数として表せ。ただし、 $x, y$  の単位は  $\text{cm}$ 、 $t$  の単位は  $\text{s}$  (秒) とする。  $x = 0, t = 0$  における位相は任意に選んでよい。
- (2) この横波の伝播速度  $c$ 、針金の運動の速さの最大値  $v_{\max}$  を計算せよ。
- (3) 針金の線密度は  $\sigma = 100 \text{ g/m}$  である。針金の張力  $F$  を求めよ。
- (4) 単位時間当たりに針金を伝えるエネルギー  $P$  は  $P = \overline{F_y v}$  と表される。ただし、 $F_y = F \frac{\partial y}{\partial x}$  は張力の  $y$  方向成分、 $v = \frac{\partial y}{\partial t}$  は針金の  $y$  方向の振動の速度、 $\overline{\quad}$  は振動の 1 周期についての平均を意味する。  $P$  を計算せよ。
5. ある波の変位が式  $u(x, t) = 2 \sin(100t - 4x)$  で与えられる。ただし、長さは  $\text{m}$ 、時間は  $\text{s}$  の単位で測る。この波の (1) 振動数  $\nu$ 、(2) 波長  $\lambda$ 、(3) 伝播速度  $v$  を計算せよ。また、 $x$  方向に  $5 \text{ m}$  離れた 2 点における (4) 位相差  $\Delta\varphi$  を計算せよ。
6. 式  $u(x, y, t) = A \sin(\alpha x + \beta y - \omega t)$  は 2 次元の波動方程式

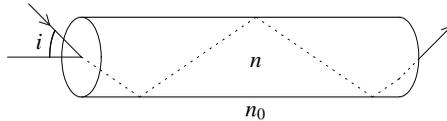
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

の解である。  $u(x, y, t)$  を方程式に代入して直接に微分を計算することにより  $\alpha, \beta, \omega, v$  の間に成り立つ関係式を求めよ。この波の波長  $\lambda$  を  $\alpha, \beta$  を使って表せ。

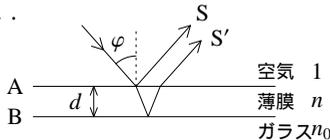
7. 透明物質の屈折率を  $n(\lambda)$  とする．光波の位相速度は  $v_p = c/n(\lambda)$  である ( $c$  真空中の光速)．群速度を  $v_g$  とするとき次式を示せ．

$$\frac{v_g}{v_p} = 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}$$

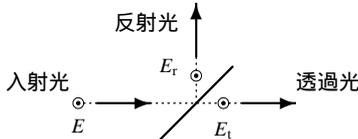
8. 次の場合に空気中の音速はどう変化するか説明せよ (ほかの量は一定とする)．  
 (1) 圧力が増加するとき． (2) 温度が増加するとき． (3) 湿度が増加するとき．
9. 空気 (15°C, 1 atm) 中で 1000 Hz, 100 phon の音波について次の値を求めよ．  
 (1) 単位時間に, 伝播方向に垂直な単位面積を通して運ばれるエネルギー (音の強さ)．  
 (2) 音圧の振幅． (3) 気体の密度の振幅． (4) 気体の流体力学的変位の振幅．
10. 光ファイバは屈折率  $n$  のガラス製の透明で長い円柱の周りを屈折率  $n_0$  の円管でおおった図のような構造をしている．入射光が円柱の中心軸に対して入射角  $i$  で入射するとき以下に答えよ．入射側の屈折率は 1 とする．  
 (1) 入射光が管内の壁で全反射を繰り返して他端へ抜け出るための条件を求めよ．  
 (2) 屈折率  $n$  の円柱が空気中 ( $n_0 = 1$ ) に置かれたとき, 入射角  $i$  が  $\pi/2 > i \geq 0$  の任意の値をとっても他端へ抜け出るための条件を求めよ．



11. ガラス板 (屈折率  $n_0$ ) 上の平行な薄膜 (厚さ  $d$ , 屈折率  $n$ ) に平行光波が入射角  $\varphi$  で入射する．入射光の波長を  $\lambda$  として, 薄膜の表面 (A 面) で反射した光  $S$  と, ガラスとの境界面 (B 面) で反射して出てきた光  $S'$  との位相差  $\Delta\varphi$  を (a)  $n > n_0$ , (b)  $n < n_0$  の場合についてそれぞれ求めよ． $n = 1.5 (< n_0)$  の薄膜に白色光が  $\varphi = 30^\circ$  で入射したとき, 可視域における反射光は中心波長 500 nm の緑色光だけであったという．薄膜の可能な厚さをすべて求めよ．



12. 入射光の強さを理想的に 1 : 1 に分ける半透明鏡 (厚さは無視する) がある．反射面上における入射光, 反射光, 透過光の電場をそれぞれ  $E \sin(\omega t - \phi)$ ,  $E_r \sin(\omega t - \phi_r)$ ,  $E_t \sin(\omega t - \phi_t)$  とする (電場の方向はすべて反射面に平行と仮定する)．



エネルギー保存則  $E^2 = E_r^2 + E_t^2$ , 1 : 1 の条件  $E_r = E_t$ , 及び反射面の両側における電場が連続という境界条件  $E \sin(\omega t - \phi) + E_r \sin(\omega t - \phi_r) = E_t \sin(\omega t - \phi_t)$  が任意の時刻に成り立たつことから, 反射波と透過波の間には  $\pi/2$  の位相差があることを示せ．

解答

1.  $f(t) = \frac{2}{\pi} \left( \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi t}{T} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{2n\pi t}{T} + \dots \right)$   
 2. 運動方程式  $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$  の一般解は  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  の一般解

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \varphi), \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m} \quad (C \text{ と } \varphi \text{ は定数})$$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \cos \omega_1 t$  の特殊解

$$x(t) = \frac{A}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos \omega_1 t + 2\gamma\omega_1 \sin \omega_1 t}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\gamma\omega_1)^2}$$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = B \sin \omega_2 t$  の特殊解

$$x(t) = \frac{B}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_2^2) \sin \omega_2 t - 2\gamma\omega_2 \cos \omega_2 t}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + (2\gamma\omega_2)^2}$$

の総和である.

3. (1)  $m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$ ,  $m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$ ,  $m\ddot{x}_3 = kx_2 - 2kx_3$

$$(2) \text{ 3 つの固有角振動数は } \begin{vmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ を解いて}$$

$$\omega = \sqrt{2} \omega_0, \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \omega_0, \text{ ただし } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

4. (1)  $y = 2 \sin 2\pi \left( \frac{x}{20} + 400t \right)$

$$(2) c = f\lambda = 80 \text{ m/s}, \quad v(x, t) = 1600\pi \cos \pi \left( \frac{x}{10} + 800t \right), \quad v_{\max} = 1600\pi \text{ cm/s} \approx 50 \text{ m/s}$$

$$(3) F = \sigma c^2 = 0.1 \text{ kg/m} \times (50 \text{ m/s})^2 = 640 \text{ N} \approx 65 \text{ kgw}$$

$$(4) F_y = Fa \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + ft \right), \quad v = 2\pi a f \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + ft \right) \text{ の積の平均値をとって}$$

$$P = 2\pi^2 F a^2 \frac{f^2}{c} = 2\pi^2 \sigma a^2 f^2 c, \quad P = 1.01 \times 10^4 \text{ W}$$

5.  $u(x, t) = 2 \sin 2\pi \left( vt - \frac{x}{\lambda} \right) = 2 \sin(100t - 4x)$  より

$$(1) v = \frac{100}{2\pi} \text{ Hz} = 15.9 \text{ Hz} \quad (2) \lambda = \frac{2\pi}{4} \text{ m} = 1.57 \text{ m} \quad (3) v = v\lambda = 25 \text{ m/s} \quad (4) \Delta\varphi = 2 \text{ rad}$$

6.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\alpha x + \beta y - \omega t)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\alpha^2 \sin(\alpha x + \beta y - \omega t)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -A\beta^2 \sin(\alpha x + \beta y - \omega t)$  を波動方程式に代入して, 共通因子を除くと  $\omega^2 = v^2(\alpha^2 + \beta^2)$  の関係を得る.  
 角波数は  $k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  と表されるので, 波長は  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ .

7.  $\omega = v_p k = \frac{ck}{n}$ ,  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2} \frac{dn}{dk} = v_p \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$

8. 音速は  $v = \sqrt{\gamma RT/M}$  と表されるから, (1) 圧力には関係しない (2)  $v \propto \sqrt{T}$  (3) 湿度が増えると等価な  $M$  が減少するので音速は速くなる

9. 1000 Hz なので  $10 \log_{10}(I/I_0)$  の数値はフォンの数値に等しい.

$$\text{また, } I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 a^2, \quad \Delta p_0 = \rho c \omega a, \quad \Delta p_0 = \frac{\rho \omega a}{c} = \rho a k \text{ の関係がある.}$$

$$(1) 10 \log_{10}(I/I_0) = 100 \text{ より } I = I_0 \times 10^{10} = 10^{-2} \text{ W/m}^2 \quad (2) \Delta p_0 = \sqrt{2\rho c I} = 2.86 \text{ Pa}$$

$$(3) \Delta p_0 = \frac{\Delta p_0}{c^2} = 2.47 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3 \quad (4) a = \frac{\Delta p_0}{k\rho} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\Delta p_0}{\rho} = 1.11 \times 10^{-6} \text{ m}$$

10. (1)  $i \leq \sin^{-1} \sqrt{n^2 - n_0^2}$  (2)  $n \geq \sqrt{2}$

11. 屈折角を  $\varphi'$  とすると  $\Delta l = \frac{nd}{\cos \varphi'} (1 + \cos 2\varphi') = \frac{nd}{\cos \varphi'} \cos^2 \varphi' = 2nd \cos \varphi'$

屈折の法則より  $n \cos \varphi' = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$  , したがって  $\Delta l = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$

A 面で位相は  $\pi$  遅れる . B 面で位相が  $\pi$  遅れるのは (b)  $n < n_0$  の場合なので

(a)  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} - \pi = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \pi$  (b)  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$  .

$\Delta\varphi = 2m\pi$  ( $m$  整数) のとき明るく見える .

$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} = m\lambda$  より  $d = \frac{m\lambda}{2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} = 177m \text{ nm}$

幾つかの膜厚に対して明るく見える波長は  $\frac{m'\lambda'}{2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} = 177m \text{ nm}$  より

	厚さ (nm)	$m' = 1$	$m' = 2$	$m' = 3$	$m' = 4$	$m' = 5$
$m = 1$	$d = 177$	500	250			
$m = 2$	$d = 353$	1000	500	333		
$m = 3$	$d = 530$	1500	750	500	375	
$m = 4$	$d = 707$	2000	1000	667	500	400

薄膜の厚さは 177 nm , 353 nm , 530 nm のいずれか ( 可視域 400 nm ~ 700 nm ) .

12. エネルギー保存則  $E^2 = E_r^2 + E_t^2$  と 1 : 1 の条件  $E_r = E_t$  より  $E_r = E_t = E / \sqrt{2}$  . この関係を境界条件の式に代入すると

$$E \sin(\omega t - \phi) + \frac{E}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - \phi_r) = \frac{E}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - \phi_t)$$

両辺を  $E$  で割って , 左辺の第 2 項を右辺に移項し , 三角関数の公式を使うと

$$\sin(\omega t - \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \sin(\omega t - \phi_t) - \sin(\omega t - \phi_r) \} = \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\phi_r + \phi_t}{2}\right) \sin \frac{\phi_r - \phi_t}{2}$$

この式が任意の  $t$  で成り立つためには  $\sqrt{2} \sin \frac{\phi_r - \phi_t}{2} = \pm 1$  でなければならない . したがって  $\frac{\phi_r - \phi_t}{2} = \pm \frac{\pi}{4}$  , すなわち  $\phi_r - \phi_t = \pm \pi/2$  .

なお , 差  $\phi_r - \phi_t$  を与えても和  $\phi_r + \phi_t$  は決まらないので  $\sin(\omega t - \phi)$  と  $\pm \cos\{\omega t - (\phi_r + \phi_t)/2\}$

を一致させることができる .

[参考]

マイケルソン干渉計 ( 図 4・25 ) において , 鏡  $M_1$  ,  $M_2$  から光検出器へ向かう光波は半透明鏡でそれぞれ 1 回反射するが , 入射側へ向かう場合には一方だけが半透明鏡で 2 回反射する . 光検出器に向かう光波が強め合うときには , 入射側へ向かう光波は打ち消し合うことになる .