

12 群(電子情報通信基礎) - 4 編(力学・電磁気学)

6 章 静電界

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

概要

本章においては、最も単純な空間である真空において、時間変化を考慮しない、「静電界」と呼ばれる電氣的な現象について扱う。

【本章の構成】

まずは基本的な電氣的現象である静電気と、それから導入される静電界の基本原理について 6-1 節と 6-2 節で扱い、ガウスの法則や電位の導入により 6-3 節から 6-5 節では静電界の基本法則を提示する。6-6 節から 6-8 節では導体や誘電体などの現実に存在する材料における静電界の性質を扱い、6-9 節では静電界のエネルギーについて提示する。

- 6-1 静電気力と電荷
- 6-2 電 界
- 6-3 電気力線とガウスの法則
- 6-4 電 位
- 6-5 ガウスの法則の微分形
- 6-6 導 体
- 6-7 静電容量とキャパシタ
- 6-8 電気影像法
- 6-9 誘電体と電気分極
- 6-10 誘電体の境界条件
- 6-11 静電界のエネルギー
- 6-12 演習問題

12 群 - 4 編 - 6 章

6-1 静電気力と電荷

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

異なる物体同士を摩擦すると、物体間には静電気力もしくはクーロン力と呼ばれる力が生じる。ここで、静電気力は時間的に変化しないものと仮定する。この静電気力の源を持つものを「電荷」と呼ぶ。単純な電荷の形態には、点電荷、線電荷、面電荷などがあり、

点電荷: 三次元の空間的広がりを無視できる電荷の形態。

線電荷: 曲線状もしくは直線状に分布し、二次元の空間的広がりを無視できる電荷の形態。

面電荷: 曲面状もしくは平面状に分布し、一次元の空間的広がりを無視できる電荷の形態。

のような理想的な形態がしばしば仮定される。これらは厳密には存在しない形態にも関わらず、良い近似で実際の電荷分布を表現している場合が多い。なお、任意の電荷分布は点電荷の重ね合わせによって表現可能である。

電荷には以下の性質がある。

- ① 電荷の符号は正と負の 2 種がある。
- ② 異符号の電荷は、その作用を中和する。
- ③ 電荷の代数和は不変である（電荷の保存則）。
- ④ 最小単位（素量）が存在し、その値は電子素量と呼ばれる。電子素量は $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ である。ここで、C（クーロン）は電荷量の単位である。

静電気力は以下の 3 つの基本的な性質を持っている。

(a) クーロンの法則

2 つの点電荷の間に働く静電気力は以下の性質を持っている。

- ① 同符号の電荷間には引力が働く。
- ② 異符号の電荷間には斥力が働く。
- ③ 力の大きさは 2 つの電荷量の積に比例し、電荷間の距離の 2 乗に反比例する。
- ④ 力の方向は電荷を結ぶ直線方向である。

以上は式によっても表現できる。電荷量 Q_1 と Q_2 の 2 つの点電荷が距離 r 隔てて存在しているとき、電荷量 Q_2 の電荷にかかる静電気力 $F_{1 \rightarrow 2}$ は、 Q_1 から Q_2 に向かう方向の単位ベクトルを r_0 とすると、

$$F_{1 \rightarrow 2} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} r_0 \quad (6.1)$$

となる。ここで、定数 k は SI 単位系においては、

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (6.2)$$

となり、 ϵ_0 は真空の誘電率であり、その値は $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ である。

(b) 作用反作用の法則

静電気力においても、力学における作用反作用の法則が適用される。すなわち、上記 (a) において、電荷量 Q_1 の電荷にかかる静電気力 $F_{2 \rightarrow 1}$ は $F_{1 \rightarrow 2}$ と大きさが同じで逆方向を向く。すなわち、

$$F_{2 \rightarrow 1} = -F_{1 \rightarrow 2} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} (-r_0) \quad (6.3)$$

が成立する。なお、点電荷以外の一般的な電荷分布においても、以下に述べる重ね合わせの原理により作用反作用の法則が成立することになる。

(c) 重ね合わせの原理

3 個以上の複数の点電荷 $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_N (N \geq 2)$ が存在するとき、 Q_i が Q_0 に及ぼす静電気力を $F_{i \rightarrow 0}$ とすると、 Q_0 にかかる静電気力 F_0 は、個々の電荷が及ぼす力の総和となる。すなわち、

$$F_0 = \sum_{i=1}^N F_{i \rightarrow 0} \quad (6.4)$$

が成立する。

12 群 - 4 編 - 6 章

6-2 電 界

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

6-1 節の静電気力は、ある電荷が、距離を隔てて存在する別の電荷に力を及ぼす、という「遠隔作用説」に基づく考え方である。これに対して、ある電荷 Q_2 に静電気力が働くのは、別の電荷 Q_1 の存在により電荷 Q_2 が存在する空間の性質が変化し、その性質の変化の直接の影響として力が発生していると解釈することもできる。これは「近接作用説」に基づく考え方で、電荷が静電気力を受けるような空間的な性質を電界もしくは電場と定義する。式 (6.1) を、

$$F_{1 \rightarrow 2} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} r_0 \right) Q_2 = Q_2 E_1$$

と表現すると、力を受ける側の電荷量 Q_2 に依存しないカッコ内の量 E_1 を、 Q_1 が Q_2 の位置に作る電界と解釈する。電界の単位は [V/m] もしくは [N/C] である。

電界の成因は以下のものがある。

- ① 電荷の存在
- ② 磁界の時間的变化 (誘導電界)

①において電荷分布の時間変化がない場合の電界を静電界と呼ぶ。②については 9-1 節で扱う。静電界は以下の 3 つの基本的な性質を持つ。

(a) クーロンの法則

単一の電荷量 Q 点電荷 (点電荷 Q) が、点 P に作る静電界は、式 (6.1) などにより、

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_0 \quad (6.5)$$

と表現できる。ここで、 r は点電荷から点 P までの距離、 r_0 は点電荷と点 P を結ぶ直線に平行で点 P に向かう単位ベクトルである。クーロンの法則とは通常は静電気力に関する法則を指すが、それから導かれる電界に関する式 (6.5) のことも意味する。

(b) 重ね合わせの原理

任意の電荷分布は点電荷の重ね合わせで表現できるので、その電荷分布が作る電界も点電荷の作る電荷の重ね合わせで表現できる。 N 個の複数の点電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_N が存在するとき、 Q_i が点 P に作る電界を E_i とすると、点 P の静電界 E は、

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad (6.6)$$

と表現できる。

(c) 保存力の場合

静電界中の点 A から点 B まで、電荷量 1 C の単位電荷を A と B を結ぶ任意の曲線 C を経て運ぶために必要なエネルギーもしくは仕事の量を考える。簡単のため静電界は、図 6.1 に示すように、原点に存在する電荷量 Q の点電荷によるものとする。求めるエネルギーを W

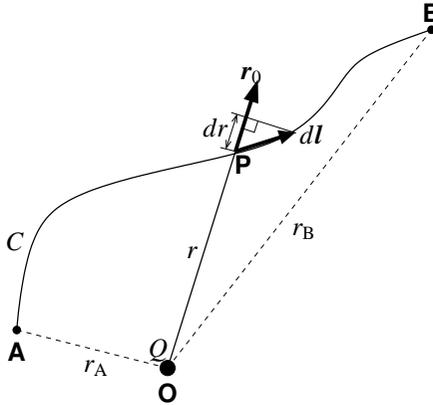


図 6.1 単一の点電荷が作る静電界における仕事

とすると、単位電荷にかかる力は電界に等しくなり、電界は式 (6.5) より、OP の長さ r と OP 方向に向かう単位ベクトル \mathbf{r}_0 を用いて表現できる。したがって、求める仕事 W は線積分で与えられ、

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B (-\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B -\frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{l}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B -\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_B^A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 r_A と r_B は、それぞれ原点と点 A、B 間の距離である。したがって、仕事は経路 C によらず始点 A と終点 B によって定まるので、点電荷が作る静電界は保存力の場である。また、重ね合わせの原理により、任意の電荷分布が作る静電界も保存力の場となる。

この関係は、任意の閉じた経路 C 上の静電界の周回線積分によって、

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (6.7)$$

とも表現できる。すなわち、任意の閉経路上の静電界の周回積分は 0 となる。この関係は、任意のベクトル場 \mathbf{A} と閉じた経路 C 、 C を周辺曲線とする開いた曲面 S において成立するストークスの定理 (\mathbf{n} は面 S の法線ベクトルで方向は経路 C の右ネジ方向の順方向)

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.8)$$

を用いると、

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

となる． S は任意の曲面なので，

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (6.9)$$

が成立することを意味する．

以上より，任意の電荷分布が作る静電界は点電荷の作る電界 (6.5) を重ね合わせることで計算することができる．以下にいくつかの電荷分布が作る静電界の例を示す．

(1) 線密度 λ の無限長直線電荷が作る静電界

図 6.2 のように，直線電荷を長さ dz の点電荷の集まりと考え，個々の点電荷が作る電界を求めてから重ね合わせの原理を用いて計算する．直線電荷を z 軸にとり，電荷から距離 r の点 P を考え，点 P から直線電荷に下ろした垂線の足 O を原点にとる． O から等距離にある長さ dz の 2 つの微小電荷 (点電荷) が点 P に作る電界は，図の dE_+ と dE_- のようになり，これから分かるように上下の対称性により電界の z 軸方向成分は相殺され， r 方向成分のみとなる．したがって，直線電荷全体も z 軸方向には電界を作らないので， r 方向の電界のみを考慮すればよい， dE_+ の r 方向成分 dE の大きさは，図の角度 θ によって，

$$dE = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}} \cos \theta$$

と表される．したがって，点 P における電界の大きさは， dE を z の関数として表して積分すると，

$$E = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} dE = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (6.10)$$

となり，方向は r 方向 (z 軸に対して外向き法線方向) を向く．

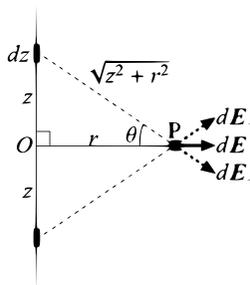


図 6.2 無限長直線電荷 (もしくは無限平面電荷) が作る静電界の計算

(2) 面密度 σ の無限平面電荷

上記と同一の図 6.2 を用いて考える．無限平面電荷を幅 dz の無限長直線電荷の集まりと考

え、これらの個々の無限長直線電荷が作る電界 (6.10) を重ね合わせればよい。無限平面電荷を zx 平面にとり、 x 軸は図に記述はないが紙面に垂直方向にとっている。

電荷から距離 r の点 P を考え、点 P から無限平面電荷に下ろした垂線の足 O を原点にとる。 O から等距離にある長さ dz の 2 本の無限長直線電荷が点 P に作る電界は、図の dE_+ と dE_- のようになり、これから分かるように上下の対称性により電界の z 軸方向成分は相殺され、 r 方向成分のみとなる。したがって、無限平面電荷全体も z 軸方向には電界を作らないので、 r 方向の電界のみを考慮すればよい、 dE_+ の r 方向成分 dE の大きさは、図の角度 θ によって、

$$dE = \frac{\sigma dz}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}} \cos \theta$$

と表される。したがって、点 P における電界の大きさは、 dE を z の関数として表して積分すると、

$$E = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} dE = \frac{\sigma r}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + r^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (6.11)$$

となり、方向は r 方向 (zx 平面に対して外向き法線方向) を向く。

(3) 半径 a の総電荷量 Q の一様な球面状電荷

この電荷分布が作る静電界も、点電荷の作る電界の重ね合わせによって計算可能だが、煩雑な計算過程を経るため結果のみを示す。球面の中心を原点にとり、原点から距離 r の点 P における電界 E は、 r_0 を原点から点 P へ向かう方向の単位法線ベクトルとすると、以下の式で与えられる。

$$E = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 & (r > a) \end{cases} \quad (6.12)$$

なお、同じ結果は 6-3 節において記述するガウスの法則を用いることでより容易に得られる。

12 群 - 4 編 - 6 章

6-3 電気力線とガウスの法則

(執筆者：來住直人)[2013 年 5 月受領]

目に見えない電界を可視化し、図的に表現する手段が電気力線であり、これにより電界の大きさと方向を図示できる。電気力線は以下の性質に従って描かれる。

- ① 正電荷から発生し負電荷で消滅する（電荷の存在しないところで発生・消滅はない）。
- ② 電気力線同士はお互いに交差しない。
- ③ 電気力線の面密度は電界の大きさに比例する。
- ④ 電気力線の接線方向は電界の方向に等しい。

図 6.3 に、単一または 2 個の点電荷が作る電気力線の例を幾つか示す。③より、単位面積当たりの電気力線の本数は電界の大きさに比例するので、面積が dS で単位法線ベクトルが \mathbf{n} となる微小面積を通過する電気力線の本数 dN_e を、便宜的に、

$$dN_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

と定義する。これより、ある曲面 S を通過する電気力線の本数 N_e は、

$$N_e = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.13)$$

とベクトル面積分によって表現できる。これを用いると、電荷量 $Q (> 0)$ の点電荷から発生する電気力線の本数が計算できる。図 6.3(s) から分かるように、点電荷を中心とする同心の球面 S をとると、 S を通過する電気力線の本数は球面の半径に依存せず、点電荷から発生する電気力線はすべて S を通過する。球面の半径を r とすると、球面上では電界と球面法線ベクトル \mathbf{n} は平行であり、電界の値は一定となる。よって、式 (6.5) より、

$$N_e = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \int_S dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6.14)$$

となるので、電荷量 $Q (> 0)$ の点電荷から発生する電気式線の本数は Q/ϵ_0 となる。これは、以下のガウスの法則と密接な関係を持つ。

任意の閉曲面 S を考えると、その曲面における電界の面積分と、その曲面内部に含まれる電荷の総量 Q' の間には、以下の関係式が成立する。この関係式を「電界に関するガウスの法則」、もしくは簡単に「ガウスの法則」と呼ぶ。ここで、ベクトル \mathbf{n} は閉曲面の外向き単位法線ベクトルである。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q'}{\epsilon_0} \quad (6.15)$$

式 (6.15) の証明

I. 単一の点電荷が作る電界の場合

点電荷が原点にあり、電荷量を Q とすると、式 (6.15) の左辺は式 (6.5) より、

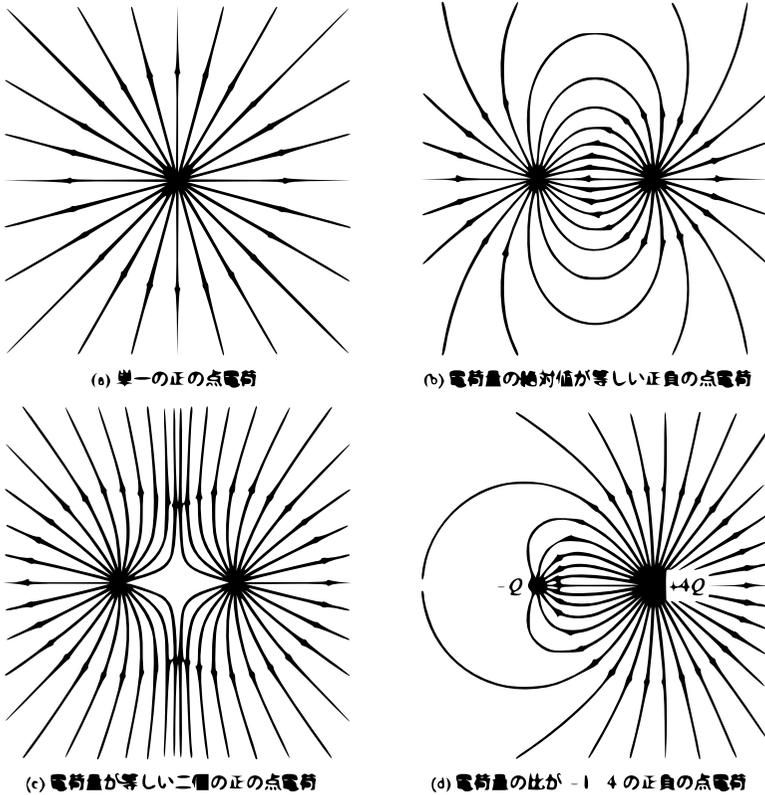


図 6.3 電気力線の例

$$\int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

となる。ここで、 Ω は S を原点から見た立体角であり、

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi & (\text{原点が } S \text{ の内部}) \\ 0 & (\text{原点が } S \text{ の外部}) \end{cases}$$

となることから式 (6.15) の左辺は、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (\text{原点が } S \text{ の内部}) \\ 0 & (\text{原点が } S \text{ の外部}) \end{cases}$$

と表される。電荷は原点にある単一の点電荷のみなので、式 (6.15) が証明された。

II. 任意の電荷分布が作る電界の場合

任意の電荷分布は点電荷の重ね合わせで表現でき、それが作る電界も、個々の点電荷が作る電界の重ね合わせで表現できる。したがって、電界 E は、閉曲面 S の内部にある総量 Q'_i の電荷が作る電界 E_i と、閉曲面の外部にある総量 Q'_e の電荷が作る電界 E_e を用いて、

$$E = E_i + E_e$$

と表現でき、(a) により、

$$\int_S E_i \cdot n dS = \frac{Q'_i}{\epsilon_0}, \quad \int_S E_e \cdot n dS = 0$$

となり、その結果、

$$\int_S E \cdot n dS = \frac{Q'_i}{\epsilon_0}$$

が成立するので、この場合も式 (6.15) が証明されたことになる。

式 (6.15) の左辺は、前節より、 S を通って外へ出ていく電気力線尾総本数となるので、ガウスの法則は「電気力線の保存則」であるということもできる。 S の内部に電荷がない場合は右辺は 0 となり、 S 内部において電気力線の発生も消滅もなく、電界が S 上に存在する場合は、 S 内に入っていきすべての電気力線は必ず S 上の別の点を通して S の外へ出ていくことを意味する。

ガウスの法則は、静電界のみならず任意の電界について成立する電磁気学の基本原理の一つである。したがって、種々の電磁気現象の説明や解析に適用可能である。そのうえ、対称性の良い電荷分布が作る電界の計算にも有用である。具体的には、球対称及び無限長軸対称、無限平面对称の場合の電界の計算に適用可能である。以下の例に示すように、6-2 節で計算したような重ね合わせの原理を利用した計算に比較して極めて簡単に計算できる場合もある。

(1) 原点を中心とする半径 a の総電荷量 Q の一様な球面状電荷 (球対称電荷分布)

閉曲面 S を電荷の球面と同心の半径 r の球面として、ガウスの法則 (6.15) を適用する。電界は電荷分布の対称性により球対称となり、電界方向は球面の法線ベクトル n と平行となり、球面上で大きさが一定となる。すると、左辺は、

$$\int_S E \cdot n dS = \int_S E dS = E \int_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

となる。 S の内部に存在する電荷量 Q' は、球面の半径 r に依存して以下ようになる。

$$Q' = \begin{cases} Q & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

したがって、原点から距離 r の点 P における電界 E は、 r_0 を原点から点 P へ向かう方向の単位法線ベクトルとすると、

$$E = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 & (r > a) \end{cases}$$

となり、式 (6.12) と同一の式となることが分かる。

(2) z 軸を中心軸とする電荷密度 ρ の半径 a の一様な無限長円柱状電荷
(無限長軸対称電荷分布)

閉曲面 S を、円柱と同心の半径 r で長さ ℓ の円筒面として、ガウスの法則の式 (6.15) を適用する。電界は電荷分布の対称性より無限長軸対称となり、電界の方向は円筒の側面の法線ベクトル \mathbf{n} と平行となり、円筒面上で大きさが一定となる。一方、円筒の上下底面においては電界と法線ベクトルが垂直となるため、面積分が 0 となる。したがって、左辺は

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(\text{側面})} E dS = E \int_{S(\text{側面})} dS = E \cdot 2\pi r \ell$$

となる。 S 内部に含まれる電荷の総量 Q' は、円筒面の半径 r に依存して以下ようになる。

$$Q' = \begin{cases} \int_0^r \rho \ell 2\pi x dx = \rho \pi r^2 \ell & (0 \leq r \leq a) \\ \rho \pi a^2 \ell & (r > a) \end{cases}$$

したがって、 z 軸から距離 r の点 P における電界 E は、 \mathbf{r}_0 を z 軸から点 P へ向かう方向の単位法線ベクトルとすると、

$$E = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \mathbf{r}_0 & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \mathbf{r}_0 & (r > a) \end{cases}$$

と求まる。

(3) 面密度 σ の無限平面電荷 (無限平面对称電荷分布)

閉曲面 S を図 6.4 に示すような、電荷と平行な面積 S_0 の上下底面を電荷の面の上下に持

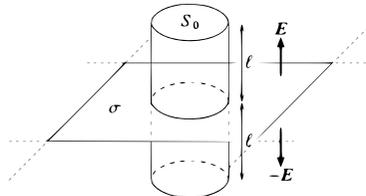


図 6.4 無限平面電荷が作る電界のガウスの法則による計算

つ、高さ 2ℓ の円筒の表面全体としてガウスの法則 (6.15) を適用する。電界は電荷分布の対称性より無限平面对称となる。すなわち、電界の方向は電荷の面と垂直外向きになり、電界の大きさは電荷の面と平行な平面上で一定となる。電荷の面と上下底面間の距離が等しい場合は、上下底面上の電界は大きさが等しく互いに逆方向となる。したがって、電界の方向は円筒の上底面の法線ベクトル \mathbf{n}_0 と平行となり、側面の法線ベクトルと直交する。これより左辺は、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(\text{上底面})} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_0 dS + \int_{S(\text{下底面})} (-\mathbf{E}) \cdot (-\mathbf{n}_0) dS = 2 \int_{S(\text{上底面})} E dS = 2ES_0$$

となる。ここで、左辺の面積分は円筒の側面と上下底面の積分に分解できるが、側面においては電界と法線ベクトルは直交し、その内積が 0 となるため積分に寄与しない。上下底面においては電界と法線ベクトルは平行であり、かつ電界の値は面上で一定となる。更に電界の方向と法線ベクトルの両方が、上底面と下底面では大きさが等しく反対向きになるので、平面電荷の上側の電界を E 、上底面の法線ベクトルを \mathbf{n}_0 とすると、

$$\text{左辺} = \int_{S(\text{上底面})} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_0 dS + \int_{S(\text{下底面})} (-\mathbf{E}) \cdot (-\mathbf{n}_0) dS = 2 \int_{S(\text{上底面})} E dS = 2ES_0$$

となる。右辺の Q' は、円筒の長さ 2ℓ に関係なく σS_0 となるので、電界は以下のように求まる。

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{方向は面の外向き法線方向:面の上下で逆向き})$$

これは式 (6.11) と同一の式となる。

12 群 - 4 編 - 6 章

6-4 電 位

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

6-2 節で示した通り，静電界は保存力の場合なので，静電界はスカラー場の勾配によって表現できる．このスカラー場を電位と呼ぶ．位置ベクトルが r となる空間の点 P の電位 $\phi(r)$ は，以下のように単位電荷（電荷量 1C の電荷）を基準点 O から点 P に運ぶための仕事で定義される．

$$\phi(r) = \int_O^P (-E) \cdot dl \quad (6.16)$$

基準点 O は，通常は無限遠方にとる．ただし，基準点を無限遠方にとることが不可能な電荷分布も存在するので，その場合はあらかじめ別の点を基準点として指定する必要がある．電位は，静電界のスカラー場による表現であり，基準点が定めれば静電界によって一意的に定まる．点 A と点 B の電位をそれぞれ ϕ_A, ϕ_B とすると，

$$\phi_B - \phi_A = \int_O^B (-E) \cdot dl - \int_O^A (-E) \cdot dl = \int_A^O (-E) \cdot dl + \int_O^B (-E) \cdot dl = \int_A^B (-E) \cdot dl \quad (6.17)$$

を点 A に対する点 B の電位差と呼ぶ．これから分かるように，電位差は基準点 O のとり方に依存せず考えている 2 点によって決まる．電位が一定の点の集まりを等電位面と呼ぶ．

電位には以下の (a), (b) の性質がある．

(a) クーロンの法則

原点に存在する単一の電荷量 Q 点電荷が，位置ベクトルが r となる点 P に作る電位 ϕ は，式 (6.5) などにより，

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.18)$$

となる．

(b) 重ね合わせの原理

任意の電荷分布は点電荷の重ね合わせで表現できるので，その電荷分布が作る電位も，式 (6.18) の点電荷の作る電位の重ね合わせで表現できる． N 個の複数の点電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_N が存在するとき， Q_i が点 P に作る電位を ϕ_i とすると，点 P の静電界 ϕ は，

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \quad (6.19)$$

と表現できる．

以上においては電位を静電界により定義したが，逆に静電界を電位により定義することも可能である．電位 ϕ の，単位ベクトル e 方向の方向微分係数は，

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{e} \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \mathbf{e} \cdot \nabla\phi \quad (6.20)$$

のように ϕ の勾配で表現できる．ここで、 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} はそれぞれ x 、 y 、 z 方向単位ベクトルである．この関係は、

$$d\phi = (\mathbf{e} \cdot \nabla\phi)ds = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}ds = \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}$$

と書き直せるので、これと式 (6.17) より、

$$\int_A^B \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B (-\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l}$$

が任意の 2 点 A、B を結ぶ任意の経路について成立する．これより、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (6.21)$$

を得るので、静電界 \mathbf{E} は電位 ϕ の勾配によって表現できる．この関係により式 (6.20) は、

$$\frac{d\phi}{ds} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}$$

と書き直されるので、 ϕ の方向微分係数が 0、すなわち電位が等しくなる方向の単位ベクトル \mathbf{e} と \mathbf{E} は直交する．したがって、静電界 \mathbf{E} と等電位面は直交する．

図 6.5 に、図 6.3 と同一の電荷分布に対する等電位面を、電気力線（破線）と併せて示す．図 6.5(c)、(d) のように 2 つの等電位面が接している箇所があるが、ここでは電界が 0 となっている．これらの点のことを鞍部点と呼ぶ．以下に、幾つかの電荷分布によって作られる電位の計算例を示す．

(1) 半径 a の総電荷量 Q の一様な球面状電荷

対応する静電界は式 (6.12) で与えられる．原点から距離 r の点 P の電位 ϕ は、積分を評価する経路を原点と無限の一点 ($r = \infty$) を結ぶ直線とすると、この直線上で $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{l}$ となるので、 $r \geq a$ の場合は、

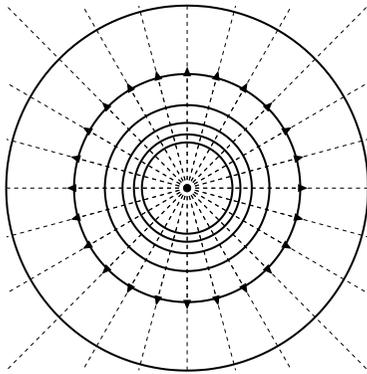
$$\phi = \int_O^P (-\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \int_P^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

となる． $r < a$ の場合は、

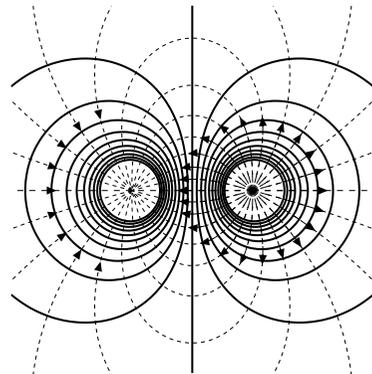
$$\phi = \int_r^a 0 dR + \int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

となるので、まとめると、

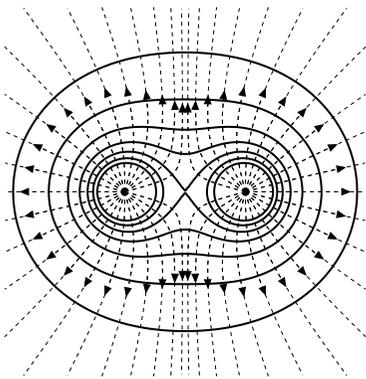
$$\phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r \geq a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & (r < a) \end{cases}$$



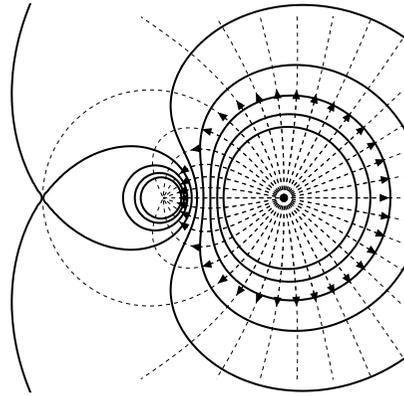
(a) 単一の正の点電荷



(b) 電荷量の絶対値が等しい正負の点電荷



(c) 電荷量が等しい 2 個の正の点電荷



(d) 電荷量の比が -1 : 4 の正負の点電荷

図 6.5 図 6.3 の電荷分布に対する等電位面 (実線) と電気力線 (破線)

と求められる。

(2) 線密度 λ の無限長直線電荷

対応する静電界は式 (6.10) で与えられる。ただし、この場合、基準点を無限遠方とすると電位の値が発散して計算不能となるため、基準点を同心の半径 a の円筒面上にとる。この面は電位 0 の等電位面となる。積分を評価する経路を、中心軸と交差し、これに直交する直線とすると、これは r 方向と平行になる。中心軸から距離 r の点の電位は、

$$\phi = \int_P^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} dR = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e \frac{a}{r}$$

と求められる。

(3) 線密度 λ の半径 a の円環 (線電荷)

図 6.6 のような円環状線電荷を考え、円の中心が原点、中心軸が x 軸として、 x 軸上の静電界のみを考える。ここでは、点電荷の電位の重ね合わせにより電位を求めることとする。円環上の長さ dl の微小電荷が x 軸上の点 P に作る電位 $d\phi$ は、

$$d\phi = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

となるので、円環全体が作る電位 ϕ は、

$$\phi = \int d\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

となる。この結果に式 (6.20) を適用することで x 軸上の電界を求めることができる。電荷分布の対称性により、 x 軸上の電界は x 方向成分 E_x のみとなり、

$$E_x = \mathbf{i} \cdot (-\nabla\phi) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\lambda ax}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}^3}$$

と求められる。

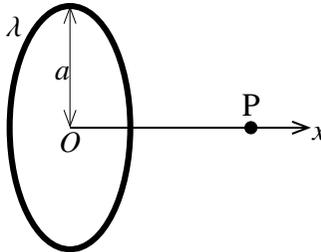


図 6.6 半径 a の円環状線電荷

(4) 電気双極子

図 6.7(a) のように大きさが等しい正と負の点電荷 $+q$ と $-q$ が距離 l 隔てて存在しており、距離 l が小さい状態を電気双極子と呼ぶ。ただし、 l が小さい場合に $+q$ と $-q$ 全体を単一の点電荷とみなすのではなく、2 つの電荷が独立して存在することを示すため、電荷量 p と距離 l の積 $P = ql$ を有限な値と考え、大きさが P で $-q$ から $+q$ に向かうベクトル \mathbf{P} により静電界が記述される。ベクトル \mathbf{P} を双極子モーメント (双極子能率) と呼ぶ。

電気双極子が作る電位は、図 6.7(b) に示す極座標を用いて計算する。 $+q$ 、 $-q$ の点電荷は x 軸上に存在し、それぞれの x 座標を $+l/2$ 、 $-l/2$ とする。ただし、電気双極子の性質により $l \ll r$ とする。極座標 (r, θ) で表される点の電位 ϕ は、

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

となる。余弦定理により、

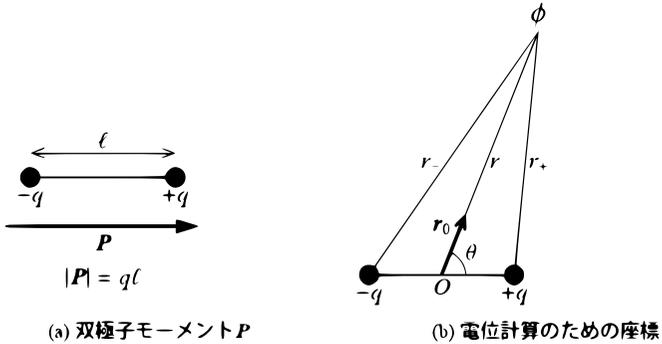


図 6.7 電気双極子

$$r_{\pm}^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \mp 2r\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta \quad (\text{複号同順})$$

となるが、仮定より $l \ll r$ とすると、

$$\frac{1}{r_{\pm}} \cong \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{l}{2r} \cos\theta\right)$$

を得るので、

$$\phi \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos\theta$$

となる。 $l \rightarrow 0$ として、 $P = ql$ を用いると、

$$\phi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6.22)$$

を得る。

12 群 - 4 編 - 6 章

6-5 ガウスの法則の微分形

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

6-3 節で示したガウスの法則 (6.15) は静電界に関する積分方程式であり、ガウスの法則の積分形である。これと同一の関係を微分方程式で記述することを考える。この目的のために、任意のベクトル場 A と閉曲面 S 、 S で囲まれる体積 V について成立するガウスの発散定理、

$$\int_S A \cdot ndS = \int_V \nabla \cdot AdV \quad (6.23)$$

を利用する。式 (6.15) の左辺に、ガウスの発散定理 (6.23) において $A = E$ を代入したものを適用すると、

$$\int_V \nabla \cdot EdV = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

を得る。ここで、 Q' を空間の電荷密度 $\rho(r)$ を用いて表すと、

$$Q' = \int_V \rho(r)dV$$

となるので、これらより、

$$\int_V \nabla \cdot EdV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(r)dV$$

を得る。この式は任意の体積 V で成立するので、結局、

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad (6.24)$$

が成立する。これがガウスの法則の微分形で、式 (6.15) と同一の意味を持つ。この式は電荷が作る電界の性質を記述しているので、式 (6.5) のクーロンの法則の別の形式とも言える。式 (6.24) は、式 (6.9) と併せて静電界の基本法則である。

静電界に対しては、ガウスの法則の微分形、すなわちクーロンの法則は、式 (6.21) により電位 ϕ を用いてラプラシアン ∇^2 を含む以下の式で表現することができる。

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad (6.25)$$

これをポアソンの方程式と呼ぶ。ポアソンの方程式は、電荷が存在しない、すなわち電荷密度 $\rho(r)$ が 0 の空間では、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6.26)$$

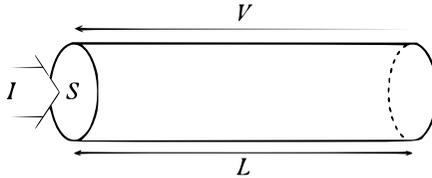
を満たす。これをラプラスの方程式と呼ぶ。

12 群 - 4 編 - 6 章

6-6 導 体

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

本節は前節までに提示した静電界の性質を踏まえて、真空中に導体が存在する状態である「導体系」における静電界の性質について提示する。まずは導体の性質の説明のために、図 6.8 のような長さ L で断面積 S の均一な材料を流れる電流と電圧の関係を考える。なお、電流の性質については 7 章で詳述する。この材料内には、長さ方向に断面内全体に均一な電流が流れ、その総量を I とする。電流により材料の両端の間には電位差 V が生じている。この材料の電気抵抗を R とすると、

図 6.8 均一な材料を流れる電流 I に伴い生じる電位差 V

$$I = \frac{V}{R}$$

が、7-1 節で示すオームの法則により成立する。 R は材料の電気抵抗で、長さ L に比例し断面積 S に反比例するので、

$$R = \eta \frac{L}{S} \quad (6.27)$$

という関係が成立する。ここで、比例係数 η を比抵抗もしくは抵抗率（単位〔 Ωm 〕）と呼び、この逆数 $\kappa = 1/\eta$ を電気伝導度もしくは導電率（単位〔 S/m 〕）と呼ぶ。表 6.1 に、幾つかの材料の抵抗率の値を示す。

表 6.1 材料の抵抗率

材料	抵抗率 $\eta[\Omega\text{m}]$
石英ガラス	$> 5 \times 10^{16}$
石油	約 10^{14}
水晶	約 10^{12}
Si(珪素)	約 10^2
Cu(銅)	2×10^{-8}
(金)	2.4×10^{-8}
超伝導材料	0

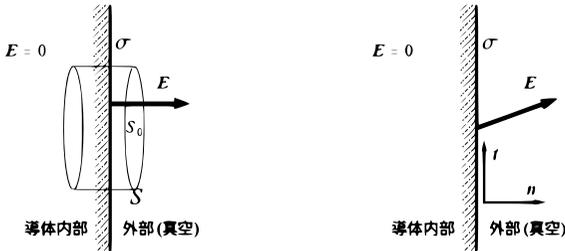
抵抗率あるいはその逆数の導電率は、様々な物理量のなかでも、材料によってその大きさの範囲が最も広い量となる。特に超伝導材料の抵抗率は、数学的に 0 となり得る点が特徴的

である．なお，電磁気学においては抵抗率が 0 となる理想的な導体を通常は仮定している．そのような理想的な導体は以下の性質を持つ．

- ① 一様な導体の内部の静電界は 0 となる．
- ② 一様な導体の内部は等電位となり，その表面は等電位面となる．
- ③ 一様な導体の内部には電荷は存在せず，導体に与えた電荷はその表面に分布する．
- ④ 導体の電荷分布は一意的に決まり，その結果として静電界も一意的に決まる．

なお，②以下の性質は以下のように，すべて①より導かれる．

①より導体内部は等電位となることは明らかで，導体表面も導体内部と電位が等しくなるため等電位面となり，②が成り立つ．更に，導体内部に取った任意の閉曲面 S に対してガウスの法則 (6.15) を適用すると，①より左辺の積分が 0 となり，その結果 S 内部に含まれる電荷量も 0 となるため，③が成立する．④については後述する．



(a) ガウスの法則を適用するための S の取り方 (b) 導体表面の電界と法線、接線ベクトル

図 6.9 導体表面における電界に関する境界条件

このような導体の性質により導体内部の電界は 0 となり，導体表面を境に電界が導体内部と外部で大きく変化する．これは導体表面に分布する電荷によるものである．また，導体表面は等電位面なので，導体外部の電界は導体表面に垂直となる．図 6.9(a) に示すような拡大した導体表面近傍において，導体表面の電荷密度を σ ，導体外部の表面における電界を E ，大きさを E とする．ここで，図のような導体表面に平行な底面を持ち底面積 S_0 の薄い円筒表面全体 S においてガウスの法則 (6.15) を適用すると，導体内部で $E = 0$ となることと側面では電界と面の法線ベクトルが直交することから，左辺 = ES_0 ，右辺 = $\sigma S_0/\epsilon_0$ を得る．したがって，導体表面の電界と電荷密度の間には，

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.28)$$

が成立する．この関係を一般化し，導体表面の静電界の満たす条件を求めてみる．図 6.9(b) のように導体表面の単位接線ベクトルと単位法線ベクトルをそれぞれ t, n とすると，導体表面の電界は法線方向成分であり，静電界 E は式 (6.21) より電位 ϕ を用いて表現できるので，以下の関係が成立する．

$$t \cdot E = 0 \quad (6.29a)$$

$$n \cdot E = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.29b)$$

式 (6.29a) と (6.29b) を導体表面の境界条件と呼ぶ。

次に、導体の性質④をより詳細に記述する。導体系の静電界は以下のいずれかの条件が成立するとき一意的に決定される。

- ① 各導体の電荷量を与えられる場合
- ② 各導体の電位を与えられる場合
- ③ 各導体の電荷量もしくは電位を与えられる場合

これを静電界における一意性法則もしくは解の一意性と呼ぶ。一樣導体中の電界は 0 となることから、導体系における電荷分布や静電界を求める際に、導体中の電界が 0 となる電荷分布があらかじめ分かっているならば、一意性法則によって、そのような電荷分布及びそれが作る静電界が求められるべき解であることを利用できる。

一意性法則の適用例を以下に示す。

(1) 電荷量 Q で帯電した半径 a の一樣な導体球

6-2 節で示した静電界の計算例の (c) 及び 6-3 節の (a) で示したように、球面に一樣に電荷が分布する場合、その球内の電界は 0 となるので、半径 a の導体球表面に電荷が一樣に分布する場合の導体球内の電界は 0 となることから一意性法則により、この分布が正しい電荷分布となり、静電界は式 (6.12) で与えられる。

(2) 帯電した厚さ d の一樣な無限導体平板

導体内部には電荷は分布せず、形状の無限平面对称性により、電荷は導体平板の両面に均一に分布する。2 つの面に分布する電荷密度を σ_1, σ_2 とすると、導体内部の電界の大きさは式 (6.11) より、 $(\sigma_1 - \sigma_2)/2\epsilon_0$ となり、これが 0 となることから、 $\sigma_1 = \sigma_2$ 、すなわち両面の電荷密度は等しくなる。このとき、導体内で電界が 0 となるので一意性法則により、これ正しい電荷分布となる。この結果、導体外部には、平板表面の外向き法線方向を向く大きさ σ_1/ϵ_0 の電界が生じる。

(3) 同心の内半径 a で外半径 b の帯電していない導体球殻と、球の中心に存在する電荷量 Q の点電荷

図 6.10 において原点からの距離を r とすると仮定より、 $a < r < b$ の領域は導体内部となるので電界は 0 となる。また、電荷は導体表面に分布し、形状の球対称性より表面に一樣に分布する。内側表面 ($r = a$) と外側表面 ($r = b$) に分布する電荷の総量をそれぞれ Q_a, Q_b とすると、電荷は原点の点電荷と同心の球面電荷分布の重ね合せとなるので、式 (6.12) などより電界の大きさ E は、

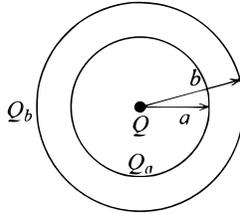


図 6.10 帯電していない同心の導体球殻とその中心の点電荷

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r < a) \\ \frac{Q + Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (a < r < b) \\ \frac{Q + Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

となるが、 $a < r < b$ は導体内のため $E = 0$ ，よって $Q_a = -Q$ となり，導体球殻が帯電していないことから $Q_a + Q_b = 0$ が成立するので， $Q_b = Q$ を得る．これは導体内の電界を 0 とする分布なので一意性法則により，これ正しい電荷分布となる．すなわち，導体球殻内側表面と外側表面には，それぞれ電荷量 $-Q$ と Q ので面電荷が一樣に分布し，電界は，

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r < a, r > b) \\ 0 & (a < r < b) \end{cases} \quad (\text{方向は外向き法線方向})$$

となる．一意性法則は，導体で囲まれた空間の静電界の性質の解析にも適用できる．図 6.11(a)

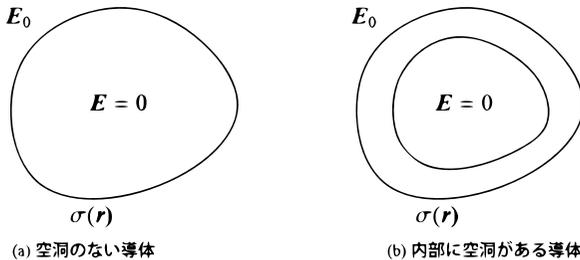


図 6.11 静電遮蔽

のような外部電界 E_0 中の一様な導体と，同一の条件下で導体内に空洞を設けた図 6.11(b) を考える．図 6.11(a) の導体内部は電界は 0 となり，これとは導体内部に空洞があること以外は

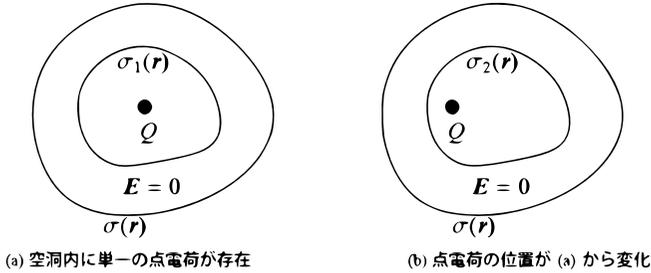


図 6.12 導体内部の空洞内に電荷がある場合の静電遮蔽

条件が同一の図 6.11(a) においては、一意性法則より空洞を含めた導体内部の電界は 0 となり、導体表面の電荷分布も (a) と同一の $\sigma(r)$ となる。すなわち、導体で囲まれた空間においては電界が 0 となり、外部の電界の影響を受けないことになる。このことを静電遮蔽と呼ぶ。

静電遮蔽は図 6.12 のように導体内部の空洞に電荷が存在する場合については、以下のようになる。空洞内には電荷量 Q の点電荷が存在する場合、導体内部の電界が 0 となることから、図 6.12(a) においては点電荷から発生する電気力線はすべて空洞表面の面電荷密度分布 $\sigma_1(r)$ によって終端し、導体内部には浸入しない。すなわち、点電荷と空洞表面の面電荷は導体内に電界を作らないので、導体外側表面の面電荷密度 $\sigma(r)$ はこれらの電荷に無関係に、導体内部の電界を 0 とするように分布する。したがって、図 6.12(b) のように点電荷の位置をずらしても、空洞表面の面電荷密度分布が $\sigma_2(r)$ に変化するだけで、導体外側表面の面電荷密度は変化しない。すなわち、空洞内部に存在する電荷量が一定である限り導体外側の電界は変化しない。

なお、図 6.12 においては導体内部に存在する電荷量が導体外側表面の電荷量に影響を及ぼすので、導体内部の電荷量変化は外部の電界に影響を及ぼす。ただし、孤立導体の場合は導体の電位を強制的に 0 とすることで導体外側表面の電荷量は 0 となるので、導体の電位を強制的に 0 とすることで外部の空間は導体内部の電界などの影響を受けなくなる。このように導体の電位を強制的に 0 とする操作を接地と呼ぶ。

12 群 - 4 編 - 6 章

6-7 静電容量とキャパシタ

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

孤立導体に電荷量 Q を与えると、導体の電位は一意的法則により Q に依存する量 ϕ に決まる。すると、重ね合わせの原理により、同じ孤立導体に与える電荷量を $2Q$ にすると、電位は 2ϕ となる。このように孤立導体の電荷量と電位の間には以下のような比例関係があり、比例係数を孤立導体の静電容量と呼ぶ。静電容量の単位は [F] (ファラッド) である。

$$Q = C\phi \quad (6.30)$$

静電容量の考え方は 2 つの孤立導体からなり、電荷を蓄える働きを持つ二導体キャパシタもしくは二導体コンデンサについても適用できる。二導体キャパシタの静電容量は、二導体にそれぞれ $+Q$, $-Q$ の電荷量を与えた場合のそれぞれの導体の電位を ϕ_1 , ϕ_2 として、

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \quad (6.31)$$

で定義される。以下に導体の静電容量についての幾つかの例を示す。

(1) 半径 a の孤立導体球

電荷量 Q をこれに与えると一意的法則で示した (a) のように電荷は球表面に一樣に分布し、球外部には球の中心に存在する点電荷と同一の静電界を作るので、球の電位は $\phi = Q/(4\pi\epsilon_0 a)$ となる。したがって、静電容量は、

$$C = \frac{Q}{\phi} = 4\pi\epsilon_0 a$$

となる。

(2) 面積 S , 厚さ d の平行平板キャパシタ

図 6.13 のような面積 S の 2 枚の薄い導体平板が距離 d 隔てて存在し、上側と下側平板それぞれに電荷量 $+Q$, $-Q$ を与えたとする。ここで簡単のために、導体平板に与えた電荷は均一に分布し、これが作る電界は、6-2 節の静電界計算 (b) や 6-3 節の (c) で示した様な無限平面電荷が作る電界式 (6.11) で近似できるとする。すると、上側と下側平板の電荷が導体平板間の空間に作る電界の大きさは下向きに σ/ϵ_0 となる。ただし、 $\sigma = Q/S$ である。この電界は均一なので導体平板間の電位差は $\phi_1 - \phi_2 = (\sigma/\epsilon_0)d$ となるので、静電容量は、

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (6.32)$$

となる。

(3) 半径 a と半径 $a+A$ の同心の薄い導体球殻からなるキャパシタ

図 6.14 において、半径 a と半径 $a+A$ の導体球殻にそれぞれ総量 $+Q$, $-Q$ の電荷を与えると、形状の対称性からこれらの電荷は導体球殻上に一樣に分布する。したがって、同心の

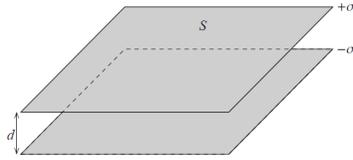


図 6.13 極板面積 S ，極板間距離 d の平行平板キャパシタ

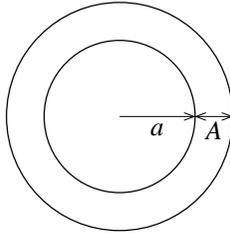


図 6.14 同心の薄い導体球殻によるキャパシタ

球面電荷分布の重ね合せとなるので，式 (6.12) などより電界の大きさ E は，

$$E = \begin{cases} 0 & (r < a, r > a + A) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (a < r < a + A) \end{cases}$$

となる．したがって，二導体間の電位差は，

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_a^{a+A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+A} \right)$$

となるので，静電容量は，

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+A}}$$

と求められる．また， $A \ll a$ ，すなわち導体球殻間の間隔が狭い場合は，

$$C \cong \epsilon_0 \frac{4\pi a^2}{A}$$

となり，平行平板キャパシタの静電容量の式 (6.32) と同一の形式となる．

静電容量のような導体の電荷量と電位の関係は，複数の導体間の電荷量と電位の関係に拡張できる．いま， N 個の孤立導体からなる導体系があり， i 番目の導体の電荷量を Q_i ，電位

を ϕ_i とすると、これらの間には以下の式が成立する。

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_{11}\phi_1 + q_{12}\phi_2 + \cdots + q_{1N}\phi_N \\ Q_2 &= q_{21}\phi_1 + q_{22}\phi_2 + \cdots + q_{2N}\phi_N \\ &\vdots \\ Q_N &= q_{N1}\phi_1 + q_{N2}\phi_2 + \cdots + q_{NN}\phi_N \end{aligned} \quad (6.33)$$

これは、

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

のように行列表現も可能である。これとは逆に、各導体の電荷量を用いて各導体の電位を表現することもできる。

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

式 (6.34) と (6.35) は同一の内容を表している。すなわち、これらの式の係数行列は互いに逆行列の関係にある。ここで、係数 q_{ii} を容量係数、 $q_{ij}(i \neq j)$ を誘導係数、 p_{ij} を電位係数と呼ぶ。更に、係数の間には

$$q_{ij} = q_{ji} \text{ および } p_{ij} = p_{ji} \quad (6.36)$$

が成立する。この関係を相反性と呼ぶ。相反性により上記の係数行列はいずれも対称行列となる。

これらの行列を用いた多導体系の解析例として、6-6 節で取り上げた静電遮蔽の問題を取り上げる。図 6.15 に示す 3 個の導体を持つ系において、導体 1 は接地された導体 2 内の空洞内に存在し、導体 3 は導体 2 の外部に存在する。導体 2 は接地されているので電位は 0 となり、容量係数と誘導係数を用いて各導体の電荷と電位の関係を式 (6.33') を用いて表すと、

$$Q_1 = q_{11}\phi_1 + q_{13}\phi_3$$

$$Q_3 = q_{31}\phi_1 + q_{33}\phi_3$$

となる。ここで $Q_1 = 0$ とすると、導体 1 は接地された導体 2 の内部の空間に存在するので

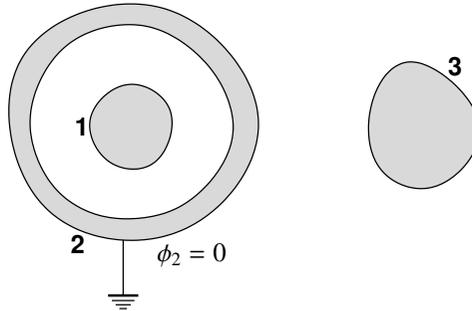


図 6.15 導体 2 で遮蔽された導体 1 と外部の導体 3

$\phi_1 = 0$ が成立する．すると，上の第一式より $q_{13}\phi_3 = 0$ が成立し，これは任意の ϕ_3 について成立するので $q_{13} = 0$ となり，相反性から $q_{31} = 0$ も成立する．したがって，上式は，

$$Q_1 = q_{11}\phi_1$$

$$Q_3 = q_{33}\phi_3$$

となる．これは，導体 1 と導体 3 の電位は互いに影響されることなく自分自身の電荷量のみで決定されることを意味する．すなわち，導体 2 による静電遮蔽の効果を表している．

12 群 - 4 編 - 6 章

6-8 電気映像法

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

ある種の導体系の問題は、それと等価な別の問題に置き換えて解くことができる。図 6.16(a) に示すような、半無限導体から距離 a のところに電荷量 Q の点電荷が存在する場合の静電界を考える。 $x = 0$ に半無限導体の表面があり、 $x < 0$ が導体内部とする。このとき、導体表面には、 $x < 0$ において点電荷が作る電界と大きさが等しく方向が逆の電界を作る電荷密度 $\sigma(r)$ が分布し、図 6.16(b) のように導体内部である $x < 0$ において、点電荷が作る電界を完全に打ち消している。そこで、導体と点電荷を取り去り、導体表面の存在した $x = 0$ に、この電荷密度 $\sigma(r)$ を再現すると、図 6.16(c) のように $x < 0$ と $x > 0$ に $x = 0$ に対して対称的な電界を作る。これは $x \geq 0$ に限定すれば、図 6.16(d) のように $x = -a$ においた電荷量 $-Q$ の点電荷が作る電界と同一である。したがって、 $x \geq 0$ に限定すれば $\sigma(r)$ の効果は $x = -a$ に置いた電荷量 $-Q$ の点電荷に置き換えることができるので、元の問題の $c > 0$ における静電界は、図 6.16(e) に示すように導体表面に対して元の点電荷と面対称の位置に存在する電荷量 $-Q$ の点電荷によって導体を置き換えたものと等しくなる。導体の効果を、導体表面を鏡に見立てた場合にそれに映る電荷によって置き換えることから、この手法を電気映像法もしくは鏡像法と呼ぶ。

電気映像法は一意性法則によって説明することができる。図 6.16(a) の半無限導体と点電荷の場合、導体は半無限であるためその電位は 0 であり、 $x = 0$ も電位 0 の等電位面となる。点電荷を電荷量 Q で帯電した小さな導体球と考えると、この問題は電位もしくは電荷量のいずれかが与えられている二導体系と考えることができる。図 6.16(e) の場合も、 $x = 0$ は電位 0 の等電位面であることから、これらの問題は $x \geq 0$ で同一の条件を満たし、導体の電位もしくは電荷量が等しくなっているので、一意性法則によって (a) と (e) の $x \geq 0$ における静電界は同一となる。すなわち、ある導体系において、導体以外の空間の電荷分布と導体表面における電位が等しくなる別の静電界が存在する場合、導体系をその静電界に置き換えて解くことが可能となる。

電気映像法を用いると、 $x \geq 0$ の空間において図 6.16(a) の問題は (e) を用いて解けるので、(a) における導体表面の面電荷密度 $\sigma(r)$ を求めてみる。電荷量 Q と $-Q$ の点電荷の座標をそれぞれ $(a, 0, 0)$ 、 $(-a, 0, 0)$ とすると、 $X \geq 0$ の点 (x, y, z) の電位は、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

となり、これと式 (6.29b) より、導体表面 ($x = 0$) の電荷密度は、

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{Qa}{2\pi\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}}$$

となる。

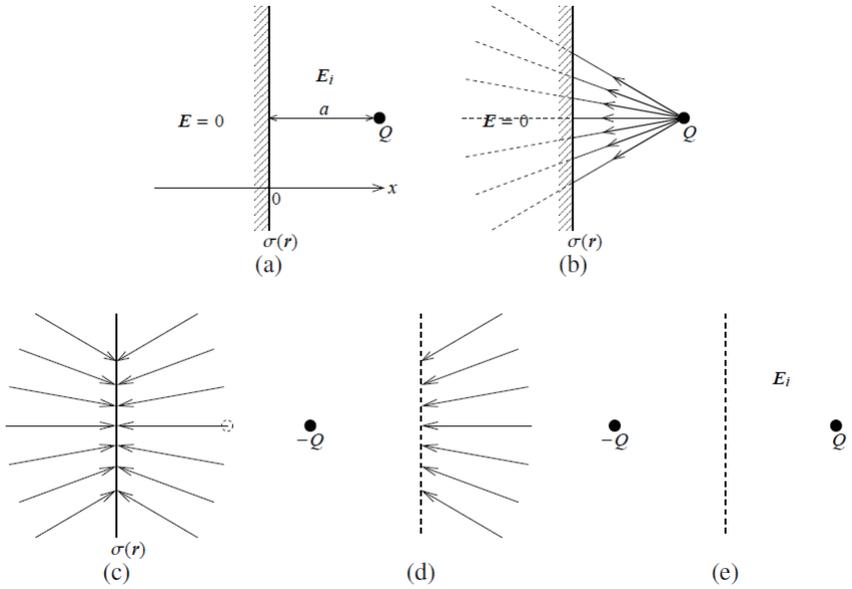


図 6.16 電気映像法を用いた静電界問題の解法の例

12 群 - 4 編 - 6 章

6-9 誘電体と電気分極

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

本節では、前節までで取り扱った導体とは、導電率に関して対極の性質を持つ誘電体が、真空中に存在する系の静電界の性質について提示する。6-6 節と同様に、電気抵抗や導電率に基づいて誘電体の性質を考えると、誘電体は導電率が極めて小さい、言い換えれば抵抗率が極めて大きな材料のことを指し、絶縁体とも呼ばれる。表 6.1 に示した材料のなかでは、石英ガラスや石油、水晶が相当する。真空や大気も誘電体の一種である。導電率が極めて小さいことは、導体の自由電子に相当する自由に動き回ることのできる電荷が存在しないことを意味する。すなわち、材料の電荷は外部電界の存在により自由に運動することができない。

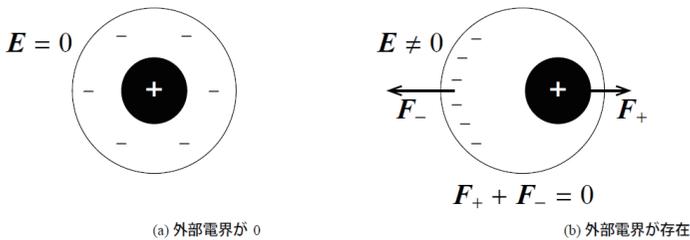


図 6.17 誘電体を構成する原子 (分子) の外部電界に対する挙動

誘電体を構成する原子もしくは分子の一つは図 6.17 に示すような正負の同じ量の電荷を持っており、図 (a) のように外部電界が 0 の場合は正負の電荷分布には偏りが無いが、図 (b) のように外部電界がかかる場合、正の電荷にかかる力 F_+ と負の電荷にかかる力 F_- は大きさが等しく方向が逆なので相殺されて原子もしくは分子の移動は伴わないが、正負の電荷分布には電界の方向に偏りが生じる。このように誘電体に電界により生じる電荷分布の偏りのことを、電気分極もしくは単に分極と呼ぶ。

図 6.18 のように一様な無限誘電体平板に、面に垂直な外部電界 E_0 がかかっているとすると、この誘電体を構成する分子においても図 6.17 と同様な電荷の偏りが起きており、その結果、右側表面と左側表面にはそれぞれ正と負の見掛け上の電荷が表れる。この電荷は導体の自由電子とは異なり分子に束縛されているため単独に取り出すことはできない。この電荷を分極電荷と呼ぶ。分極電荷は一様な誘電体内部においては存在せず、このように異なる誘電体の境界に存在する。分極電荷も静電界を作るため、誘電対中の電界 E は外部電界 E_0 と分極電荷の作る電界の和となるため、 E_0 とは異なる値をとる。

分極の大きさ、言い換えれば生じる分極電荷量の大きさは、誘電体によって異なってくる。分極の大きさと方向を記述するために図 6.18 の例を用いて電気分極ベクトル P を以下のように定義する。

- ① P の方向は正の電荷の移動方向となり、 E と平行になる。
- ② P の大きさは単位体積当たりの電気双極子の大きさとなり、単位は $[\text{C}/\text{m}^2]$ である。

図 polcharge では，誘電体表面に表れる分極電荷密度の大きさとなる．

電気分極ベクトル \mathbf{P} は，分極が起きる誘電体内においてのみ存在し，真空中では 0 となる．更に，静電界に対する式 (6.15) と類似のガウスの法則を満たす．図 6.19 のように分極が生じている誘電体があるとき，これを一部に含む任意の閉曲面 S をとると， \mathbf{P} の大きさは単位面積内を移動する見掛け上の分極電荷の量に等しいので， S 内に含まれる分極電荷の総量を Q_p とすると，

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = -Q_p \quad (6.37)$$

という関係が成立する．これを電気分極に関するガウスの法則と呼ぶ．

分極の仕方が方向に依存しない等方性の誘電体の場合，電気分極ベクトル \mathbf{P} は同じ場所の電界 \mathbf{E} と平行になり，その大きさは電界の大きさに比例し，以下のように記述される．

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (\chi_e > 0) \quad (6.38)$$

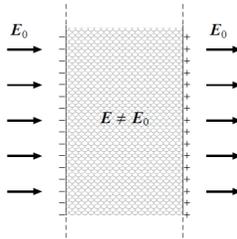


図 6.18 外部電界により誘電体表面に生じる分極電荷

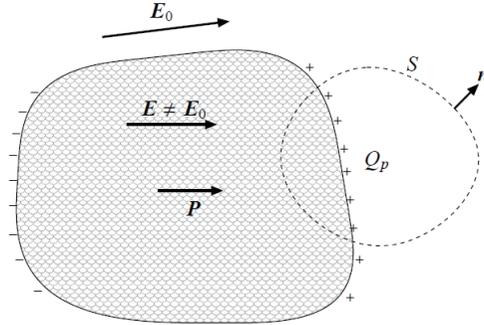
ここで， χ_e は分極率または電気感受率と呼ばれる無名数（無次元の定数）であり，誘電体によって固有の値をとる．この関係を用いると，以下のように一様な誘電体内部には分極電荷が存在しないことを示すことができる．

一様な誘電体の内部に完全に含まれる任意の閉曲面を S として，電気分極に関するガウスの法則を (6.37) 適用すると， S 内に含まれる分極電荷の総量を Q_p として，

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = -Q_p$$

が成立する．一方，式 (6.38) 及びガウスの法則 (6.15) から，

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \varepsilon_0 \chi_e \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \varepsilon_0 \chi_e \frac{Q_p}{\varepsilon_0} = \chi_e Q_p$$

図 6.19 分極 P に関するガウスの法則

を得るので、これらより、

$$(\chi_e + 1)Q_p = 0$$

が成立するが、 $\chi_e > 0$ より $Q_p = 0$ となるので、一様な誘電体の内部には分極電荷が存在しない。

次に、誘電体系の取扱をより容易にするために、以下で定義される電束密度を導入する。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (6.39)$$

電気分極ベクトル \mathbf{P} は真空中では 0 となるので、真空中の電束密度は、

$$\mathbf{D}_{\text{真空中}} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (6.40)$$

となる。また、式 (6.38) より等方的な誘電体においては、式 (6.39) は、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (6.41)$$

となり、電束密度と電界は平行で互いに比例関係にある。ここで、 ϵ を誘電体の誘電率、 ϵ_r を誘電体の比誘電率と呼ぶ。すると、式 (6.40) より、 ϵ_0 を「真空の誘電率」と呼ぶことの根拠が明確になり、真空の比誘電率は 1 であることが分かる。また、誘電体の比誘電率は 1 以上の値をとる。

電束密度についても静電界に対する式 (6.15) と類似のガウスの法則が成立する。

図 6.20 のように導体と誘電体が混在している系を考える。この中に任意の閉曲面 S をとり、ガウスの法則 (6.15) を適用すると、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_t + Q_p}{\epsilon_0} \quad (6.42)$$

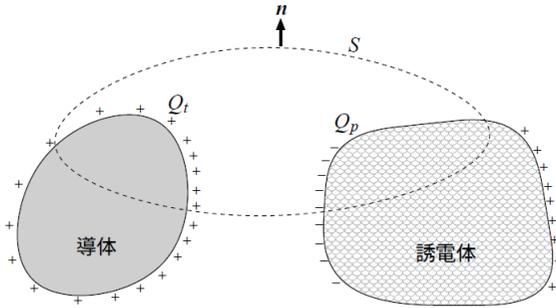


図 6.20 誘電体に関する（電束密度 D に関する）ガウスの法則

を得る。ここで、 Q_t と Q_p はそれぞれ、 S 内部に含まれる分極電荷以外の電荷の総量と分極電荷の総量である。一方、電束密度 D の面積分はこの結果と、電気分極に関するガウスの法則 (6.37) により、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = \varepsilon_0 \frac{Q_t + Q_p}{\varepsilon_0} - Q_p = Q_t$$

となり、結局、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_t \quad (6.43)$$

を得る。これを誘電体に関するガウスの法則もしくは電束密度 D に関するガウスの法則と呼ぶ。分極電荷以外の電荷 Q_t は、単独で取り出すことが可能な電荷であり、真電荷と呼ぶ。電界に関するガウスの法則に対する式 (6.24) の形式と同様に、誘電体に関するガウスの法則にも以下の微分形が成立する。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_t(\mathbf{r}) \quad (6.44)$$

ここで、 $\rho_t(\mathbf{r})$ は真電荷密度を表す。この式は、電束密度の発生及び消滅は真電荷においてのみ生じることを意味する。

誘電体に関するガウスの法則を用いると、誘電体系の静電界の計算が容易になる場合がある。例として、図 6.21 に示すような極板間が誘電率 ε の誘電体で満たされた面積 S 、厚さ d の平行平板キャパシタの静電容量を求めてみる。

上側と下側平板それぞれに総量 $+Q_t$ 、 $-Q_t$ を与えたとする。6-7 節と同様に、これらの電荷は均一に分布し、これが作る電束密度は一樣な無限平面電荷が作るもので近似できるものとする。6-3 節の (c) と同様な手順で、電荷密度 σ_t の面電荷が作る電束密度は平板に垂直で大きさが $\sigma_t/2$ となる。ここで、 $\sigma_t = Q_t/S$ が成立する。よって、上側と下側平板の真電荷が導体平板間の空間に作る電束密度の大きさは下向きに σ_t となり、これより電界の大きさは、

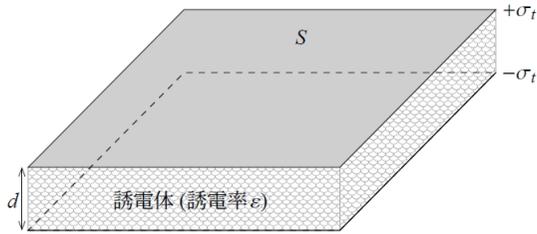


図 6.21 誘電体で満たされた平行平板キャパシタ

下向に σ/ε となる．よって静電容量 C_D は，6-3 節の (c) と同様に，

$$C_D = Q_t/(\phi_1 - \phi_2) = \varepsilon \frac{S}{d} \quad (6.45)$$

と計算できる．式 (6.32) で与えられる極板間が真空の平行平板キャパシタの静電容量 C と比較すると，

$$\frac{C_D}{C} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

となり，比誘電率 ε_r が 1 より大きな誘電体を用いることにより静電容量を同一の寸法を用いて高めることができる．

12 群 - 4 編 - 6 章

6-10 誘電体の境界条件

(執筆: 来住直人) [2013 年 5 月 受領]

誘電率の異なる誘電体の境界においては分極電荷が発生し、これが作る静電界によって、誘電体境界においては静電界の不連続が生じる可能性がある。そこで、誘電体境界の両側における電界や電束密度の関係、すなわち誘電体境界の境界条件を図 6.22 によって考える。

図 6.22(a) のように誘電率 ε_1 と ε_2 の誘電体が境界面を共有しており、それぞれの領域の電界と電束密度を E_i , D_i ($i = 1, 2$ は領域の番号) とする。ベクトル t と n はそれぞれ境界面の単位接線ベクトルと単位法線ベクトルである。ここで、境界面には真電荷は存在しないとす。境界面の両側における静電界の間に成立する関係、すなわち境界条件を導出する。まずは、図 6.22(b) により、電界 E_1 と E_2 の関係を考える。境界面をまたぎ、長さ ℓ の長辺が境界面に平行な薄い矩形の開閉路 C を図のようにとり、式 (6.7) の周回線積分を評価する。矩形の単辺が長辺 ℓ よりも十分小さく、長辺上における電界の変化を無視すると、この周回線積分は、

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_2 \cdot t\ell + E_1 \cdot t\ell = 0$$

となる。次に、図 6.22(c) において電束密度 D_1 と D_2 の関係を考える。境界面をまたぎ、底面積 S_0 の底面が境界面に平行な薄い円筒表面全体 S において、誘電体に関するガウスの法則 (6.43) を適用する。円筒の高さと底面上における電束密度の変化を無視し、境界面には分極電荷のみが存在することを考慮すると、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot n dS = D_1 \cdot (-n)S_0 + D_2 \cdot nS_0 = 0$$

を得る。これらをまとめると、

$$t \cdot E_1 = t \cdot E_2 \quad (6.46a)$$

$$n \cdot D_1 = n \cdot D_2 \quad (6.46b)$$

となる。これらが、求めるべき誘電体境界面における境界条件であり、境界面における電界の接線方向成分と電束密度の法線方向成分が連続であることを意味する。図 6.22 と同様な 2 つの誘電体の境界面付近の電界を考える。誘電率の大小関係として $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ を仮定すると、電気力線と電束線 (電束密度の図的表示) は図 6.23 に示すようになる。境界面には分極電荷が存在し、これによって (a) に示すように電気力線の本数が変化している。(b) の電束線については、境界面においてその方向は変化するが、その本数は不変である。これは、境界面には真電荷が存在しないため、誘電体に関するガウスの法則によって電束の発生または消滅は境界面では生じないことによる。

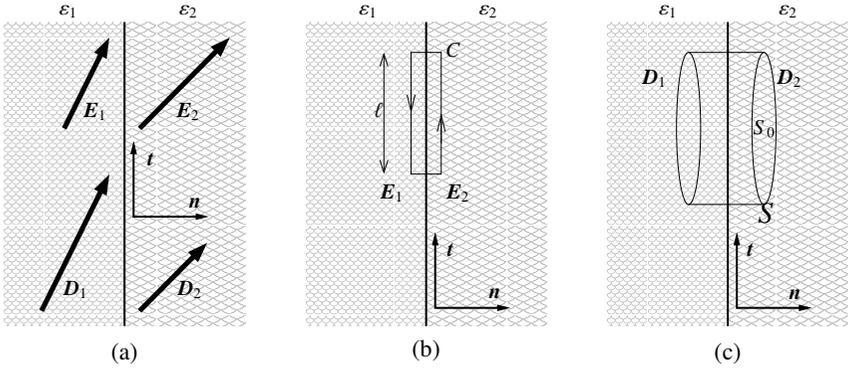
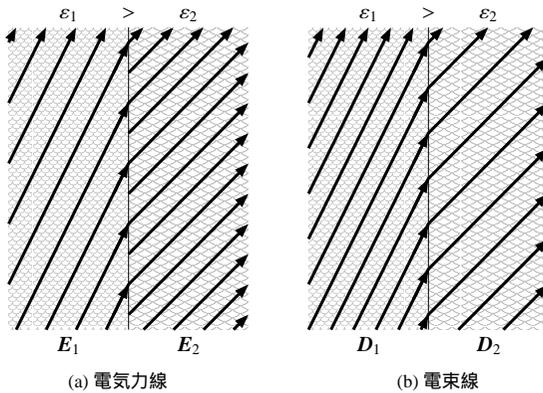


図 6.22 異なる誘電体境界面における境界条件の導出



(a) 電磁力線

(b) 電束線

図 6.23 2つの誘電体の境界面付近における静電界

12 群 - 4 編 - 6 章

6-11 静電界のエネルギー

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

電荷や帯電した物体の間には静電気が働くため、それらの電荷や物体を移動するには力学的な仕事が必要となり、系のエネルギーが変化する。このような静電気に起因する仕事によって系に蓄えられるエネルギーを静電エネルギーと呼ぶ。本節では、ある電荷分布を形成するための仕事から出発して、静電界に蓄えられる静電エネルギーについて記述する。

I. 電荷分布の静電エネルギー

無限遠方に存在する電荷を運んできて、ある電荷分布を形成するために必要な静電エネルギーを計算する。まずは、複数の点電荷からなる電荷分布を形成するために必要な静電エネルギーについて考える。点電荷の数が 2 個の場合、図 6.24 (a) のような電荷の配置を形成することを考えると、まずは電荷量 Q_1 の点電荷を無限遠方からその場所に運ぶ際には、ほかの電荷が存在しないため静電気力を受けず、エネルギーを必要としない。したがって、電荷量 Q_2 の点電荷を無限遠方から、 Q_1 からの距離 r_{12} まで運ぶために必要なエネルギーが、求める静電エネルギーである。これは、 Q_1 が Q_2 の位置に作る電位から、

$$W_2 = \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \right) Q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}}$$

と求められる。同様に、3 個の点電荷が図 6.24(b) のような配置となる電荷分布を作るためのエネルギーは、

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_3 Q_1}{r_{31}} \right)$$

となる。これらより、 N 個の点電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_N が、 Q_i と Q_j 間の距離が $r_{ij}(=r_{ji})$ となるような配置の電荷分布を形成するための静電エネルギーは、

$$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i \quad (6.47)$$

で与えられる。ここで ϕ_i は、点電荷 Q_i の位置の Q_i 以外の全電荷による電位で、

$$\phi_i = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (6.48)$$

である。式 (6.47) は、点電荷以外の一般的な電荷密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ を形成するための静電エネルギーに対して、以下のように適用することができる。ここで、 $\phi(\mathbf{r})$ は、 $\rho(\mathbf{r})$ が作る電位である。

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \quad (6.49)$$

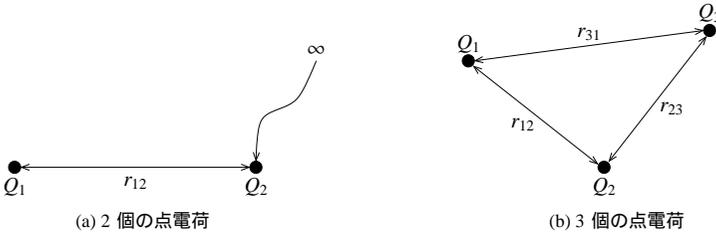


図 6.24 複数の点電荷からなる電荷分布

II. 多導体系の静電エネルギー

N 個の導体があり、 i 番目の導体 i の電荷量と電位がそれぞれ Q_i と ϕ_i となっているとき、この状態を形成するための静電エネルギーを求める。ここでは、すべての導体の電荷量が 0 の状態から出発して、導体 i の電荷量と電位がそれぞれ λQ_i と $\lambda \phi_i$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) である中途の状態に到達している時点を考える。この状態において、導体 i に更に電荷量 $Q_i d\lambda$ を加えるために必要なエネルギーは、

$$dW = \sum_{i=1}^N (Q_i d\lambda) \lambda \phi_i = \left(\sum_{i=1}^N Q_i \phi_i \right) \lambda d\lambda$$

となる。したがって、求める静電エネルギーはこれを $\lambda = 0$ から $\lambda = 1$ まで積分したもので、

$$W = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i \quad (6.50)$$

となる。これを利用することで静電容量 C の二導体キャパシタの静電エネルギーが計算できる。二導体にそれぞれ $+Q$ 、 $-Q$ の電荷を与えた場合の二導体キャパシタの静電エネルギーは、6-7 節で定義した静電容量を用いて、

$$W = \frac{1}{2}(Q\phi_1 - Q\phi_2) = \frac{1}{2}Q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2}C(\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (6.51)$$

と表現できる。

III. 空間に蓄えられる静電エネルギー

以上において静電エネルギーは、ある電荷分布を形成するために必要なエネルギーとしていたが、以下に示すように、電荷分布によって作られる静電界の形態で空間に蓄えられていると解釈することもできる。電荷密度分布を形成するために必要な静電エネルギーの式 (6.49) は、ポアソンの式 (6.25) により、

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \phi \nabla^2 \phi dV$$

と書き換えられる。この式の右辺をさらに書き換えるために、任意の閉曲面 S と S で囲ま

れる体積 V において成立する以下に示すグリーンの公式

$$\int_S f \nabla g \cdot n dS = \int_V (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV \quad (6.52)$$

において, $f = g = \phi$ とおいて成立する,

$$\int_S \phi \nabla \phi \cdot n dS = \int_V (\phi \nabla^2 \phi + |\nabla \phi|^2) dV$$

を用いると,

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\int_V |\nabla \phi|^2 dV - \int_S \phi \nabla \phi \cdot n dS \right)$$

を得る。なお, 積分を行う体積 V は電荷分布全体を含めれば任意にとっても, 式 (6.49) から分かるように W の値は不変なので, V として電荷分布内の任意の点を中心とした半径 R の十分大きな球の内部全体をとる。すると S は, 半径 R の球の表面全体となり, ここから見ると電荷分布は, 球面の中心に存在し, この電荷分布の総量 Q と同じ電荷量の点電荷とみなされるので,

$$\phi \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \quad |\nabla \phi| \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

と近似できることから, $R \rightarrow \infty$ とすると,

$$\int_S \phi \nabla \phi \cdot n dS \propto \frac{1}{R} \rightarrow 0$$

となることと式 (6.21) より,

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V |\nabla \phi|^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2 dV \quad (6.53)$$

を得る。この式は, 静電エネルギーが静電界の体積積分によって記述できることを意味し, 静電界 E の存在する空間には密度 $1/2\varepsilon_0|E|^2$ で静電エネルギーが蓄えられていることを意味する。より一般的には, 静電界においては密度

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varepsilon |E|^2 \quad (6.54)$$

でエネルギーが蓄えられている。

次に, 静電界のエネルギーを利用して静電気力を計算する「仮想仕事の原理」について述べる。保存力の場の力学においては, 物体の位置エネルギーを座標で微分した量と, 物体にかかる力が関係付けられるので, 静電界についても類似の関係が成立する。これを利用することによって, 静電界の解析による計算が困難な静電気力の計算が可能となる場合がある。

図 6.25 のように, $+Q, -Q$ の電荷で帯電した二導体系において, 導体 1 にかかる力 F を求めたい。このときに, 導体 2 から導体 1 へ電荷量を dQ だけ移動させて, 電気エネルギー

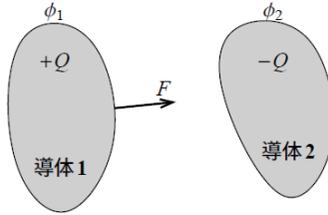


図 6.25 帯電した二導体系にかかる力

を供給したとする．供給された電気エネルギーは，導体 1 と導体 2 の電位差を $\phi (= \phi_1 - \phi_2)$ とすると， ϕdQ となる．この電気エネルギーの一部は系の静電エネルギーの増大 dW に寄与し，残りが導体間の相対的位置関係の力 F 方向への変化 dl により仕事 Fdl に寄与したとすると，

$$\phi dQ = dW + Fdl \quad (6.55)$$

という熱力学第一法則に類似の関係式を得る．ここで， $W = 1/2 Q\phi$ より，

$$dW = \frac{1}{2}(Qd\phi + \phi dQ)$$

となり，これと式 (6.55) より，

$$Fdl = \frac{1}{2}(\phi dQ - Qd\phi) \quad (6.56)$$

が導かれるが，以下の 2 つの場合について考える．

(1) 電荷量が不変の場合 ($dQ = 0$)

$$F = -\frac{1}{2}Q \left. \frac{\partial V}{\partial l} \right|_{Q=\text{一定}} = -\frac{\partial W}{\partial l} \quad (6.57a)$$

(2) 電位差が不変の場合 ($d\phi = 0$)

$$F = \frac{1}{2}\phi \left. \frac{\partial Q}{\partial l} \right|_{\phi=\text{一定}} = \frac{\partial W}{\partial l} \quad (6.57b)$$

これらより力 F は，電荷量が不変の場合は静電エネルギーが減少する方向へ，電位差が不変の場合は静電エネルギーが増加する方向へかかることを意味する．

このことを，図 6.26 に示すような極板面積 S ，極板間距離 x の平行平板キャパシタの，右側極板にかかる力の解析で検証してみる．

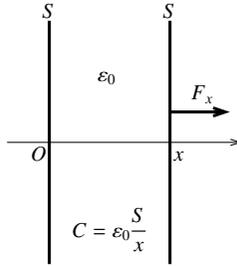


図 6.26 平行平板キャパシタの極板にかかる力

(1) の場合は,

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x}{\epsilon_0 S}$$

より,

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S}$$

となり, (2) の場合は,

$$W = \frac{1}{2} C \phi^2 = \frac{1}{2} \frac{\phi^2 \epsilon_0 S}{x}$$

より,

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{\epsilon_0 S}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S}$$

を得るので, (1), (2) 共に $-x$ 方向への同一の力がかかることが分かる.

静電界の解析による静電気力の計算が困難な例としては, 図 6.27 に示すような, 平行平板キャパシタに挿入した誘電体板に働く力を取り上げる. 極板の幅と奥行き, 極板間距離をそれぞれ a, b, d とし, 誘電率 ϵ_0 , 厚さ d の誘電体板が幅方向に x だけ極板間に挿入されている. この状態でキャパシタは, 誘電率 ϵ と ϵ_0 の平行平板キャパシタの並列とみなせるので, 静電容量は式 (6.32) と (6.45) により,

$$C = \epsilon \frac{bx}{d} + \epsilon_0 \frac{b(a-x)}{d} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)bx}{d} + \epsilon_0 \frac{ba}{d}$$

となる. 図 6.27 のように, 極板間の電位差が電池により V となっている場合は式 (6.57b) より, 誘電体板にかかる x 方向の力は,

$$F_x = \frac{1}{2} V \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{(\epsilon - \epsilon_0)b}{d} > 0$$

となる. したがって, 誘電体板にはキャパシタの極板に引き込まれる向きの上記の力が働く.

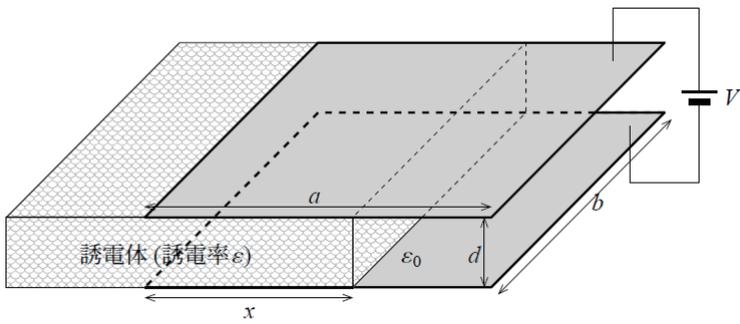


図 6.27 平行平板キャパシタに挿入した誘電体板