

1 群 (信号・システム) - 4 編 (回路理論)

3 章 動的システムとしての回路

(執筆者 : 伊藤 和人) [2018 年 5 月 受領]

概要

回路をシステムと考えたとき、その応答 (出力) はシステムへの入力とシステムの状態に依存する。システムに最も基本的な信号であるインパルス関数を入力したときの応答であるインパルス応答は、システムの特性を表すとともに、システムが静止状態にあるときのインパルス応答は、システムの入出力間伝達関数を与える。回路システムの状態は、回路中のキャパシタの電圧及びインダクタの電流であり、回路構成に基づいてシステムへの入力の影響を受けながら逐次変化する。その変化の様子は、キャパシタ、インダクタの電圧電流特性に基づいて、連立一階状態微分方程式で表される。状態方程式を解くことにより、回路の動的システムとしての振る舞いを知ることができる。

【本章の構成】

本章ではインパルス応答とステップ応答 (3-1 節)、畳み込み積分 (3-2 節)、状態方程式と解 (3-3 節)、ゼロ入力応答とゼロ状態応答 (3-4 節)、過渡応答と定常応答 (3-5 節)、正弦波定常応答 (3-6 節) に関して述べる。

1 群 - 4 編 - 3 章

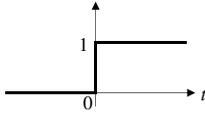
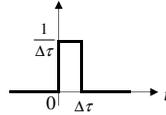
3-1 インパルス応答とステップ応答

(執筆者：伊藤 和人) [2018 年 5 月 受領]

3-1-1 ステップ関数とインパルス関数

単位ステップ関数 (Step Function) $u(t)$ の定義を式 (3・1) に、波形を図 3・1 に示す。

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3\cdot1)$$

図 3・1 単位ステップ関数 $u(t)$ 図 3・2 方形パルス関数 $P_{\Delta\tau}(t)$

方形パルス関数 $P_{\Delta\tau}(t)$ を式 (3・2) のように定義する。

$$P_{\Delta\tau}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, t \geq \Delta\tau \\ \frac{1}{\Delta\tau} & 0 \leq t < \Delta\tau \end{cases} \quad (3\cdot2)$$

方形パルス関数の波形を図 3・2 に示す。方形パルス関数の面積は 1 である。

$P_{\Delta\tau}(t)$ の極限 $\Delta\tau \rightarrow 0$ は単位インパルス関数 (Impulse Function) $\delta(t)$ であり、式 (3・3) 及び式 (3・4) の関係を有する。

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (3\cdot3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3\cdot4)$$

単位ステップ関数及び単位インパルス関数は、「単位」を省略してそれぞれ単にステップ関数及びインパルス関数ということがある。本章でも特に断りがなければステップ関数、インパルス関数はそれぞれ単位ステップ関数、単位インパルス関数を意味するものとする。

ステップ関数とインパルス関数には式 (3・5) の関係が成り立つ。

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (3\cdot5)$$

すなわち、 $u(t)$ の微分は $\delta(t)$ に等しい。

3-1-2 インパルス応答

図 3・3 に示す回路システムが静止状態、すなわちシステム中のすべてのキャパシタの電荷



図 3・3 回路システム

が 0、すべてのインダクタの磁束が 0 とする。静止状態のシステムにインパルス関数 $\delta(t)$ を入力したときの出力をシステムのインパルス応答 (Impulse Response) という。

システムが線形時不変のとき、応答は入力信号のラプラス変換とシステムの伝達関数 (Transfer Function) の積で与えられる。入力信号 $\delta(t)$ のラプラス変換は 1 であるから、システムのインパルス応答はシステムの伝達関数そのものとなる。したがって、システムの伝達関数を逆ラプラス変換したものがインパルス応答となる。システムの伝達関数を $H(s)$ 、インパルス応答を $h(t)$ とすれば、式 (3・6) の関係が成り立つ。ただし、 $\mathcal{L}\{\cdot\}$ はラプラス変換を表す。

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) \quad (3\cdot6)$$

3-1-3 ステップ応答

図 3・3 に示す静止状態の回路システムにステップ関数 $u(t)$ を入力したときの出力をシステムのステップ応答 (Step Response) という。

システムのステップ応答を $g(t)$ 、そのラプラス変換を $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ とする。ステップ信号 $u(t)$ のラプラス変換は $1/s$ であるから式 (3・7) の関係が成り立つ。

$$G(s) = \frac{H(s)}{s} \quad (3\cdot7)$$

したがって

$$H(s) = sG(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} + g(0_+) \quad (3\cdot8)$$

ここで、 $g(0_+)$ はステップ信号 $u(t)$ 印加直後 ($t = 0_+$) のステップ応答の値とする。式 (3・8) の $H(s)$ を逆ラプラス変換して式 (3・9) が成り立つ。これは、インパルス応答 $h(t)$ とステップ応答 $g(t)$ の関係を示している。

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} + g(0_+)\delta(t) \quad (3\cdot9)$$

1 群 - 4 編 - 3 章

3-2 畳み込み積分

(執筆者：伊藤 和人) [2018 年 5 月受領]

本節では畳み込み積分 (Convolution) を定義し、システムの入力とインパルス応答の畳み込み積分によってシステムの応答が与えられることを示す。

3-2-1 畳み込み積分

t を変数とする関数 (一次元信号) $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込み積分 $f \otimes g$ を式 (3・10) に示すように定義する。

$$f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (3 \cdot 10)$$

畳み込み積分 $f \otimes g$ は、 t を変数とする関数 (一次元信号) となる。以下の式 (3・11) が成り立つため、畳み込み積分は交換則 $f \otimes g = g \otimes f$ が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau \quad (3 \cdot 11)$$

畳み込み積分のラプラス変換を求める。 $t < 0$ において $f(t) = 0$ 、 $g(t) = 0$ とし、このとき

$$f \otimes g = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (3 \cdot 12)$$

ラプラス変換の定義より、

$$\mathcal{L}\{f \otimes g\} = \int_0^{\infty} (f \otimes g) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau e^{-st} dt \quad (3 \cdot 13)$$

積分の順序を入れ替え、ラプラス変換の時間域の推移則 $\mathcal{L}\{g(t - \tau)\} = e^{-s\tau} \mathcal{L}\{g(t)\}$ より

$$\mathcal{L}\{f \otimes g\} = \int_0^{\infty} f(\tau) \int_0^{\infty} g(t - \tau)e^{-st} dt d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} G(s) d\tau = F(s)G(s) \quad (3 \cdot 14)$$

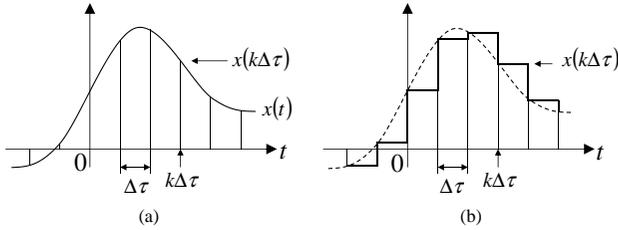
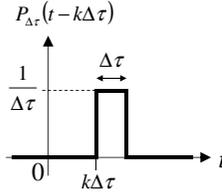
ただし、 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ 、 $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ とする。

これより、畳み込み積分のラプラス変換は、各関数のラプラス変換の積に等しいことが示される。

3-2-2 システムの応答

図 3・4(a) に示す信号 $x(t)$ を考える。時間 t を微小な時間 $\Delta\tau$ で等間隔に分割し、 $k\Delta\tau \leq t < (k+1)\Delta\tau$ (k は整数) を満たす時刻 t における信号値が $x(k\Delta\tau)$ に等しい信号 $x_{\Delta\tau}(t)$ (図 3・4(b)) によって $x(t)$ を近似する。極限 $\Delta\tau \rightarrow 0$ において $x_{\Delta\tau}(t) \rightarrow x(t)$ となる。

信号 $x_{\Delta\tau}(t)$ は、図 3・5 に示す方形パルス関数 $P_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau)$ を用いて式 (3・15) のように表せる。すなわち、大きさが $1/\Delta\tau$ の複数個の方形パルス関数にそれぞれ大きさ $x(k\Delta\tau)\Delta\tau$ を乗じて重ね合わせたものとなる。

図 3.4 (a) 元信号 $x(t)$, (b) 近似信号 $x_{\Delta\tau}(t)$ 図 3.5 方形パルス関数 $P_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau)$

$$x_{\Delta\tau}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta\tau)\Delta\tau P_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau) \quad (3.15)$$

システムに方形パルス関数 $P_{\Delta\tau}(t)$ を入力したときの応答を $h_{\Delta\tau}(t)$ とする．同システムに近似信号 $x_{\Delta\tau}(t)$ を入力したときの応答 $y_{\Delta\tau}(t)$ は，システムが線形時不変ならば式 (3.16) となる．

$$y_{\Delta\tau}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta\tau)\Delta\tau h_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau) \quad (3.16)$$

極限 $\Delta\tau \rightarrow 0$ をとると， $P_{\Delta\tau}(t) \rightarrow \delta(t)$ (インパルス関数)， $h_{\Delta\tau}(t) \rightarrow h(t)$ (インパルス応答) であるから， $k\Delta\tau = \tau$ と置いて，信号 $x(t)$ の応答 $y(t)$ は式 (3.17) となる．

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.17)$$

これは，システムの応答 $y(t)$ が入力 $x(t)$ とインパルス応答 $h(t)$ の畳み込み積分であることを示す．

システムが因果的であり $t < 0$ について $h(t) = 0$ とする．また $t < 0$ のとき入力 $x(t) = 0$ であり， $t = 0$ においてシステムが静止状態とする．このとき，応答 $y(t)$ は以下の式 (3.18) で与えられる．

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.18)$$

入力 $x(t)$ ，応答 $y(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ ， $Y(s)$ とし，システムの伝達関数を $H(s)$ とすれば，畳み込み積分のラプラス変換の性質より以下が成り立つ．

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (3.19)$$

1 群 - 4 編 - 3 章

3-3 状態方程式と解

(執筆者：伊藤 和人)[2018 年 5 月 受領]

回路中のキャパシタ電圧とインダクタ電流を回路の状態変数 (State Variable) として、回路構成ならびに回路への入力に依存した状態変数の動的振る舞いを記述する連立一階の状態微分方程式が立てられる。この状態微分方程式を含む状態方程式 (State Equation) を解くことで、回路中の任意の電圧及び電流の時間域特性を求めることができる。

3-3-1 状態方程式

図 3・6 に示す回路において、キャパシタ C の電圧 $v_C(t)$ 、電流 $i_C(t)$ 、インダクタ L の電圧 $v_L(t)$ 、電流 $i_L(t)$ 、電圧源の電圧 $E(t)$ はすべて時間 t の関数とするが、表記の簡略化のため ' (t) ' は省略するものとする。

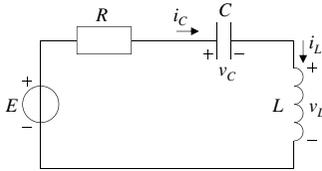


図 3・6 回路 1

キャパシタとインダクタの素子法則により式 (3・20)、式 (3・21) に示す関係が成り立つ。

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C \quad (3 \cdot 20)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_L \quad (3 \cdot 21)$$

また、キルヒホッフの電圧則、キルヒホッフの電流則より式 (3・22)、式 (3・23) に示す関係が成り立つ。

$$E = Ri_L + v_L + v_C \quad (3 \cdot 22)$$

$$i_L = i_C \quad (3 \cdot 23)$$

これらより、 v_L 、 i_C を消去して式 (3・24)、式 (3・25) に示すような v_C 、 i_L に関する連立一階微分方程式が導出できる。

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L \quad (3 \cdot 24)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_C - Ri_L + E \quad (3 \cdot 25)$$

これを式 (3・26) のように行列の形で表す。

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 26)$$

インダクタの電圧 v_L は、式 (3・27) によって示される。

$$v_L = \begin{pmatrix} -1 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + E \quad (3\cdot27)$$

式 (3・28)、式 (3・29) のようにベクトル、行列をとる。

$$x(t) = \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} E \end{pmatrix} \quad (3\cdot28)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} v_L \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -R \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad (3\cdot29)$$

キャパシタの電圧、インダクタの電流は回路の状態 (State) を表す状態変数となり、これらを要素とするベクトル $x(t)$ を状態ベクトルという。これらベクトル、行列を用いて式 (3・26) の連立一階微分方程式と式 (3・28) の関係式は式 (3・30)、式 (3・31) のように示される。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3\cdot30)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3\cdot31)$$

$\dot{x}(t)$ は $x(t)$ の時間 t による一階微分を表すとす。式 (3・30) を状態微分方程式、式 (3・31) を入出力状態方程式という。また、両者を合わせて標準状態方程式という。

3-3-2 状態微分方程式の誘導

与えられた回路について状態微分方程式を導く系統的な方法を述べる。回路は電源条件 (電流源のみからなるカットセット、電圧源のみからなる閉路は存在しない) を満たし、更に以下の条件を満たすものとする。

C1: インダクタのみからなるカットセット、電流源とインダクタのみからなるカットセットは存在しない。

C2: インダクタのみからなる閉路、電圧源とインダクタのみからなる閉路は存在しない。

C3: キャパシタのみからなる閉路、電圧源とキャパシタのみからなる閉路は存在しない。

C4: キャパシタのみからなるカットセット、電流源とキャパシタのみからなるカットセットは存在しない。

状態微分方程式では、キャパシタ電圧、インダクタ電流が状態変数となるが、回路に条件 C1 ~ C4 に示すカットセットまたは閉路が存在する場合はキャパシタ電圧またはインダクタ電流が一次従属となり、状態微分方程式の変数として不要なものが存在する。条件 C1 ~ C4 に反する回路にここで述べる状態微分方程式導出を適用した場合、式 (3・34) の行列 K_{22} が非正則となり、状態微分方程式を導出できない。

電源条件、及び条件 C1 ~ C4 を満たす回路について状態微分方程式を導出するにあたり、図 3・7 に示すように、キャパシタを電流源、インダクタを電圧源で置換し、それぞれ C 電流

源, L 電圧源と呼ぶこととする. C 電流源は電圧を基準に, L 電圧源は電流を基準に向きを決める (4 編 2 章 2-1 参照). このとき, 電流源の電流は受動素子の場合と逆になるが, 図 3・7 に示すように電流値 $I_C = -i_C$ と考える. また, 電圧源の電圧は受動素子の場合と逆になるが, 図 3・7 に示すように電圧値 $V_L = -v_L$ と考える.

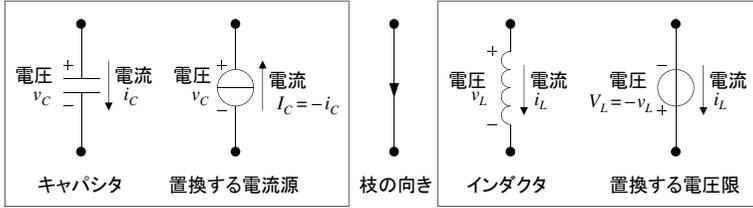


図 3・7 キャパシタを置換する C 電流源及びインダクタを置換する L 電圧源

図 3・6 に示す回路について, キャパシタ, インダクタをそれぞれ C 電流源, L 電圧源に置換し, 混合解析 (Hybrid Analysis) (4 編 2 章 2-6 参照) を可能とするため図 3・8(a) に示すように電流値 $J = 0$ の電流源を追加した回路のグラフ, 及び混合解析のための木を図 3・8(b) に示す. 図 3・8(b) では木枝を太線で示す.

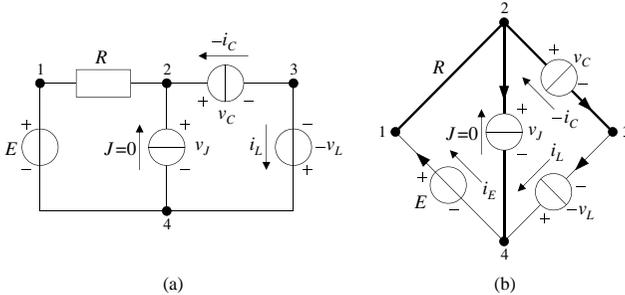


図 3・8 (a) 回路 1 に電流値 0 の電流源追加, (b) 回路のグラフおよび混合解析木

図 3・8(b) に基づいて導出した混合解析方程式を式 (3・32) に示す.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ v_J \\ i_L \\ i_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_C \\ 0 \\ -v_L \\ E \end{pmatrix} \quad (3\cdot32)$$

式 (3・32) について, 変数の並びを C 電流源の電圧, L 電圧源の電流, その他電流源の電圧, 電圧源の電流の順に入れ替え, また右辺の駆動量並び順を C 電流源の電流, L 電圧源の電圧, その他電流源の電流, 電圧源の電圧の順に入れ替えた方程式を式 (3・33) に示す.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \\ v_J \\ i_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_C \\ -v_L \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \quad (3\cdot33)$$

x は C 電流源の電圧及び L 電圧源の電流から成る列ベクトル, v はその他の電流源の電圧及び電圧源の電流から成る列ベクトル, x_f は C 電流源の電流及び L 電圧源の電圧から成る列ベクトル, f はその他の電流源の電流及び電圧源の電圧から成る列ベクトルとし, 式 (3・33) を式 (3・34) のように表す.

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ f \end{pmatrix} \quad (3\cdot34)$$

これより式 (3・35) に示す方程式が得られる.

$$-x_f = -(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})x - K_{12}K_{22}^{-1}f \quad (3\cdot35)$$

式 (3・33) 及び式 (3・34) より

$$-x_f = \begin{pmatrix} C \frac{dv_C}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_J \\ i_E \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad (3\cdot36)$$

$$K_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & R \end{pmatrix} \quad (3\cdot37)$$

を式 (3・35) に代入して式 (3・38) に示す状態微分方程式が得られる.

$$\begin{pmatrix} C \frac{dv_C}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} \quad (3\cdot38)$$

式 (3・38) の第 1 行を C , 第 2 行を L で除することにより, 式 (3・26) と同一の状態微分方程式が得られる.

別の例として, 図 3・9(a) に示す回路についてキャパシタ, インダクタを電源に置換し, 混合解析を可能とするため電流値 $J = 0$ の電流源を追加した回路グラフ及び混合解析のための木を図 3・9(b) に示す. 図 3・9(b) では木枝を太線で示す.

図 3・9(b) について得られる混合解析方程式を式 (3・39) に示す. ただし, 抵抗 R_k のコンダクタンスを G_k とする.

$$\begin{pmatrix} G_4 & 0 & -G_4 & 0 & -1 \\ 0 & G_3 + G_5 & -G_3 & -1 & 0 \\ -G_4 & -G_3 & G_3 + G_4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & R_1 + R_2 & -R_1 \\ 1 & 0 & 0 & -R_1 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ v_J \\ i_L \\ i_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_{C1} \\ -i_{C2} \\ 0 \\ -v_L \\ E \end{pmatrix} \quad (3\cdot39)$$

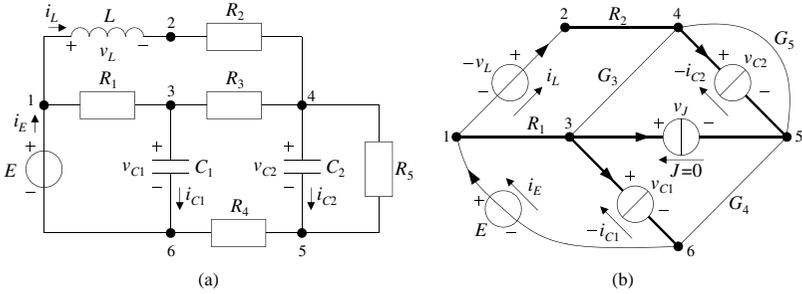


図 3.9 (a) 回路 2 . (b) 回路グラフ及び混合解析木

また、行、列を入れ替えた混合解析方程式を式 (3.40) に示す .

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} G_4 & 0 & 0 & -G_4 & -1 \\ 0 & G_3 + G_5 & -1 & -G_3 & 0 \\ 0 & 1 & R_1 + R_2 & -1 & -R_1 \\ \hline -G_4 & -G_3 & 1 & G_3 + G_4 & 0 \\ 1 & 0 & -R_1 & 0 & R_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \\ v_J \\ i_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_{C1} \\ -i_{C2} \\ -v_L \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

式 (3.40) 及び式 (3.35) により、式 (3.41) に示す状態微分方程式が導出される .

$$\begin{pmatrix} C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} \\ C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_3 + R_4} - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_3 + R_4} & \frac{R_4}{R_3 + R_4} \\ \frac{1}{R_3 + R_4} & -\frac{1}{R_3 + R_4} - \frac{1}{R_5} & \frac{R_3}{R_3 + R_4} \\ -\frac{R_4}{R_3 + R_4} & -\frac{R_3}{R_3 + R_4} & -R_2 - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} E \quad (3.41)$$

3-3-3 状態方程式の解

式 (3.30) を以下のように書き換える .

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t) \quad (3.42)$$

e^{At} に関する以下の関係

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = e^{At} A \quad (3.43)$$

より

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} x(t)) = e^{-At} \dot{x}(t) + \frac{d}{dt} (e^{-At}) x(t) = e^{-At} (\dot{x}(t) - Ax(t)) \quad (3.44)$$

であるから，式 (3・42) の両辺に左から e^{-At} を乗じて

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} \mathbf{x}(t)) = e^{-At} \mathbf{B}u(t) \quad (3\cdot45)$$

これを時刻 $\tau = 0_+$ から $\tau = t$ まで積分して

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) = e^{A \cdot 0} \mathbf{x}(0_+) + \int_{0_+}^t e^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (3\cdot46)$$

式 (3・46) の両辺に左から e^{At} を乗じ， $e^{A \cdot 0} = e^{At} \cdot e^{-At}$ の関係を適用して

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0_+) + \int_{0_+}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (3\cdot47)$$

また，式 (3・31) より出力ベクトル $\mathbf{y}(t)$ は式 (3・48) で与えられる．

$$\mathbf{y}(t) = C e^{At} \mathbf{x}(0_+) + C \int_{0_+}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau + D u(t) \quad (3\cdot48)$$

$\mathbf{x}(t)$ ， $\mathbf{u}(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(s)$ ， $U(s)$ とする．式 (3・30) をラプラス変換して式 (3・49) を得る．

$$sX(s) = AX(s) + \mathbf{x}(0_+) + BU(s) \quad (3\cdot49)$$

ここから， $X(s)$ は式 (3・50) で表される．なお， I は単位行列とする．

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \mathbf{x}(0_+) + (sI - A)^{-1} BU(s) \quad (3\cdot50)$$

また，式 (3・31) をラプラス変換して式 (3・50) を代入することにより，出力ベクトル $\mathbf{y}(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ は式 (3・51) で表される．

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} \mathbf{x}(0_+) + (C(sI - A)^{-1} B + D)U(s) \quad (3\cdot51)$$

なお，式 (3・51) より伝達関数 $H(s)$ は式 (3・52) のように与えられる．

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (3\cdot52)$$

1 群 - 4 編 - 3 章

3-4 ゼロ入力応答とゼロ状態応答

(執筆者：伊藤 和人)[2018 年 5 月 受領]

図 3・10 に示す回路において，時刻 $t = 0$ にスイッチ SW を閉じた後のキャパシタ C の電圧 $v(t)$ を求める．SW を閉じた直後の $t = 0_+$ における C の電圧（初期値）を $v(0_+)$ とする．

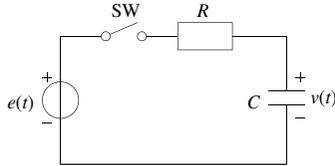


図 3・10 回路 3

電圧源 $e(t)$ のラプラス変換を $E(s)$ として， $v(t)$ のラプラス変換 $V(s)$ は式 (3・53) となる．

$$V(s) = \frac{1}{1 + sCR} E(s) + \frac{CR}{1 + sCR} v(0_+) \quad (3 \cdot 53)$$

$E(s)$ を回路の入力， $V(s)$ を回路の応答とみなす． $v(0_+)$ は回路の状態の初期値（初期状態）であることから，回路の応答は式 (3・53) の第 1 項のように初期状態に依存しない応答と，第 2 項のように入力に依存しない応答に分けられる．初期状態に依存しない応答（第 1 項）は初期状態 $v(0_+) = 0$ のときの応答 $V(s)$ と考えられ，ゼロ状態応答（Zero State Response）という．入力に依存しない応答（第 2 項）は入力 $E(s) = 0$ のときの応答 $V(s)$ と考えられ，ゼロ入力応答（Zero Input Response）という．ゼロ状態応答とゼロ入力応答の和を完全応答（Complete Response）という．

なお，回路の初期状態は，キャパシタの初期電圧に加えてインダクタの初期電流も含む．

1 群 - 4 編 - 3 章

3-5 過渡応答と定常応答

(執筆者：伊藤 和人) [2018 年 5 月 受領]

図 3・10 に示す回路において、時刻 $t = 0$ にスイッチ SW を閉じた後のキャパシタ C の電圧 $v(t)$ を求める。 $t = 0$ における C の電圧 (初期値) を $v(0_+)$ とする。電圧源 $e(t)$ が

$$e(t) = E_m e^{j\omega t} \quad (3\cdot54)$$

であるとき、 $v(t)$ ($t \geq 0$) は式 (3・55) となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{E_m}{1 + j\omega CR} e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{E_m}{1 + j\omega CR} e^{-j\omega t} + v(0_+) e^{-\frac{t}{CR}} \\ &= \left(\frac{E_m}{1 + j\omega CR} + v(0_+) \right) e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{E_m}{1 + j\omega CR} e^{-j\omega t} \end{aligned} \quad (3\cdot55)$$

$v(t)$ を回路の応答とすれば、回路の応答は、式 (3・55) の第 1 項のように時間とともに減衰する応答と第 2 項のように時間が経過しても減衰せずに存続する応答からなる。時間とともに減衰する応答を過渡応答 (Transient Response)、時間が経過しても減衰せずに存続する応答を定常応答 (Steady State Response) という。

なお、一般に過渡応答及び定常応答は、それぞれ入力に依存する成分 (ゼロ状態応答成分) と状態に依存する成分 (ゼロ入力応答成分) から成る。式 (3・55) の場合は、過渡応答はゼロ状態応答成分とゼロ入力応答成分があり、定常応答はゼロ状態応答成分のみとなっている。

1 群 - 4 編 - 3 章

3-6 正弦波定常応答

(執筆者：伊藤 和人) [2018 年 5 月受領]

ある線形時不変な回路に角周波数 ω の正弦波

$$x(t) = E_m e^{j\omega t} \quad (3\cdot56)$$

を入力したときのゼロ状態応答を $y(t)$ とする。回路の伝達関数を $H(s)$ とすると、回路の応答 $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ は式 (3・57) となる。

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s) \frac{E_m}{s - j\omega} \quad (3\cdot57)$$

$Y(s)$ の極は、 $H(s)$ の極及び $j\omega$ となる。 $H(s)$ の極を p_k ($k = 1, 2, \dots, N$) とし、 $p_0 = j\omega$ とする。極はすべて一位と仮定すれば、 $Y(s)$ は部分分数展開により式 (3・58) となる。

$$Y(s) = \sum_{k=0}^N \frac{A_k}{s - p_k} \quad (3\cdot58)$$

ここで、 A_k は式 (3・59) によって与えられる。

$$A_k = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k) Y(s) \quad (3\cdot59)$$

特に $k = 0$ のときは

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow p_0} (s - p_0) Y(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} H(s) E_m = H(j\omega) E_m \quad (3\cdot60)$$

となる。式 (3・58) を逆ラプラス変換して $y(t)$ を得る。

$$y(t) = \sum_{k=0}^N A_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} + H(j\omega) E_m e^{j\omega t} \quad (3\cdot61)$$

回路が安定ならば極 p_k ($k = 1, 2, \dots, N$) の実部は負であり、式 (3・61) の右辺第 1 項は時間の経過とともに減衰する (過渡応答)。第 2 項のみが定常応答として存続し、応答 $y(t)$ は

$$y(t) = H(j\omega) E_m e^{j\omega t} = H(j\omega) x(t) \quad (3\cdot62)$$

となる。すなわち、正弦波入力に対する定常応答である正弦波定常応答 (Sinusoidal Steady State Response) は入力と同じ角周波数の正弦波であり、角周波数が ω のとき、入力と応答の比は $H(j\omega)$ で与えられる。

参考文献

- 1) 武部 幹：“回路の応答,” コロナ社, 1981.
- 2) 小澤孝夫：“電気回路 I,II,” 昭晃堂, 1978,1980.
- 3) 奥村浩士：“電気回路理論,” 朝倉書店, 2011.