

■10 群 (集積回路) - 8 編 (集積化センサとマイクロマシン)

3 章 MEMS 加速度センサ

【本章の構成】

本章では以下について解説する.

- 3-1 はじめに
- 3-2 サイズモ系 (強制外力荷重の場合の機械モデル)
- 3-3 加速度センサ
- 3-4 変位計測
- 3-5 加速度センサの例
- 3-6 まとめ
- 補遺 3-A 機械システムと電気回路の相似関係
- 3 章演習問題

■10 群-8 編-3 章

3-1 はじめに

(執筆者：鈴木健一郎) [2018年8月受領]

圧力センサが準静的な力に起因する静的な変位を計測するのに使用されるのに対して、動きに伴う力、速度、加速度を計測するのに慣性センサ (Inertial Sensor) が用いられる。慣性センサは、直線加速度を計測する加速度センサと回転の角速度を計測するジャイロセンサ (ジャイロスコープ) に分類することができる。それぞれのセンサに対して利用目的から4つのグレードが設定されており、センサ分解能データを表 1・1 に示す。ジャイロセンサの感度では地球の回転自転速度が 4.2 mdeg/s (15 deg/hr) であるので、車載用の最も高い感度を持つセンサで検知できる下限になる。

表 1・1 慣性センサのグレード分類

(a) 加速度センサの分解能

Inertial Grade	0.01 ~ 0.1 mG
Low Inertial Grade	0.1 ~ 1 mG
Tactical Grade	1 ~ 10 mG
Automotive	10 ~ 1000 mG

(b) ジャイロセンサの分解能 (バイアスドリフト)

Inertial Grade	< 0.01 deg/h (< 3 μ deg/sec)
Low Inertial Grade	0.01 ~ 0.1 deg/h (< 30 μ deg/sec)
Tactical Grade	0.1 ~ 10 deg/h (< 3 mdeg/sec)
Automotive	10 ~ 10000 deg/h (< 3 deg/sec)

■10 群-8 編-3 章

3-2 サイズモ系（強制外力荷重の場合の機械モデル）

（執筆著：鈴木健一郎）[2018年8月 受領]

外力 $f(t)$ がフレームに作用したときのフレーム内部の機械系の動きを考えよう。図 2・1 は、この機械系の動きを計測する原理を示すものでサイズモ系モデルと呼ばれている。このモデルを用いると、フレーム内部に置かれた慣性質量 m の運動方程式が以下のように与えられる。

$$\ddot{x} + 2\eta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = -\frac{f(t)}{m} \quad (2 \cdot 1a)$$

ここで、 x は質量 m のフレームに対する変位である。また、固有角振動数： $\omega_n = k/m^{1/2}$ を用いて、ばね定数 k と減衰係数 b を

$$k = m\omega_n^2, \quad b = 2 \zeta \omega_n m = 2 \zeta (mk)^{1/2} \quad (2 \cdot 1b)$$

と表した。 ζ は減衰比と呼ばれる無次元量である。慣性質量に働く力は、フレーム内を基準にとると、フレームに作用する外力と方向が逆になるので、 $-f(t)$ とした。

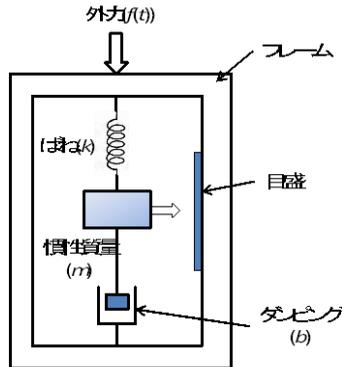


図 2・1 外力 $f(t)$ がフレームに作用したときのサイズモ系モデル

式(2・1a)は以下のラプラス変換を用いることによって解析的に解くことができる。

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2 \cdot 2)$$

すなわち、式(2・2)を式(2・1)に代入することにより、微分方程式が簡単な代数方程式に変換され、以下の伝達関数を得ることができる。

$$X = \frac{-F}{ms^2 + bs + k} \quad (2 \cdot 3)$$

調和振動荷重の場合には式(2・3)で $s = j\omega$ と置くことができるため、複素数の $X(j\omega)$ から以下の実数の振幅倍率と位相とを導くことができる。

A) 振幅倍率 :

$$M = \frac{X(\omega)}{X_{st}} = \frac{X(\omega)}{\frac{F}{k}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2 \cdot 4a)$$

B) 位相 :

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} + \pi \quad (2 \cdot 4b)$$

ここで, ω は外力の固有各振動数である.

初期位相 α を持つ調和振動の外力を以下のように表したとき,

$$f(t) = F \cos(\omega t - \alpha) \quad (2 \cdot 4c)$$

慣性質量の時間的に振動する変位は以下のように表すことができる.

$$x(t) = |X(\omega)| \cos(\omega t - \alpha - \phi) \quad (2 \cdot 4d)$$

この式より, 式(2.3)の $X(j\omega)$ の絶対値は変位振幅であることが分かる. 角振動数比 (ω/ω_n) に対する振幅倍率と位相の関係を図 2.2 に示す.

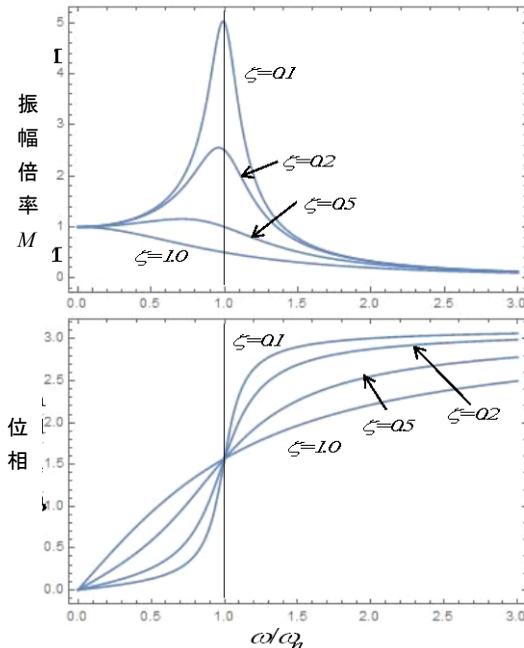


図 2.2 式(2.3) $X(j\omega)$ の角振動数比 (ω/ω_n) に対する振幅倍率と位相の関係

以上のことから、外力の角振動数 ω と機械系の固有角振動数 ω_n の大小関係に対応して、以下の興味深い特性を導くことができる。

(i) $\omega < \omega_n$ のとき

$$|X(\omega)| \approx F/k, \quad \phi \approx \pi \quad (2 \cdot 5a)$$

すなわち、変位の大きさは外力に比例する。

(ii) $\omega \approx \omega_n$ のとき

$$|X(\omega)| \approx \frac{F}{k} \frac{1}{2\zeta} \frac{\omega_n}{\omega}, \quad \phi \approx \frac{3\pi}{2} \quad (2 \cdot 5b)$$

すなわち、変位の大きさは、外力に比例して増大するが、外力の角振動数が増大するとこれに反比例して減少することになる。加速度センサは、機械構造体の固有各振動数 ω_n が検出信号 ω に対して(i)に示す周波数領域をとるように設定される。また、ジャイロセンサは機械構造体の固有各振動数 ω_n が検出信号 ω に対して(ii)に示す周波数領域をとるように設定される。

なお、式(2.1)は、機械的運動方程式とキルヒホッフの電気回路方程式 (KVL) の類似性から、**図 2.3** に示す等価電気回路モデルを用いても解くことができる (3章補遺参照)。同図に示す各電気回路パラメータと機械要素の相関関係を、**表 2.1** に示す。**図 2.3** 及び**表 2.1** の相関関係は電気機械システムを統一的に理解するのに役立つものであり、5章に述べる共振器デバイスでしばしば利用されている。

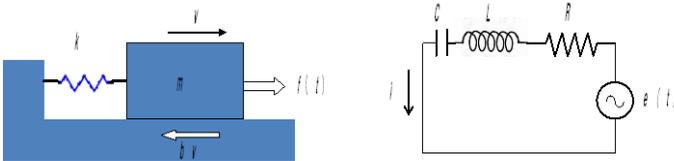


図 2.3 m - k - b 機械システム系の機械モデルとその等価電気回路モデル

表 2.1 **図 2.3** に示すモデルにおける機械と電気要素の間の対応

機械要素	電気要素
力 (f)	電圧 (e)
変位 (x)	電荷 (q)
速度 (v)	電流 (i)
質量 (m)	インダクタンス (L)
ばね定数 (k)	1/静電容量 ($1/C$)
減衰係数 (b)	抵抗 (R)

■10 群-8 編-3 章

3-3 加速度センサ

(執筆者：鈴木健一郎) [2018年8月 受領]

3-3-1 原理

加速度センサの機械応答特性は、図 2・1 の外力に代えて外部から加速度 α が印加した場合のサイズモ系モデルを用いて解析することができる。図 3・1 は、質量 m を持つ可動機械構造体を支える土台に図面の下方方向に加速度 α が印加したときの構造体の変位を模式的に示したものである。センサの変位は、図 2・1 のサイズモ系において $f=m\alpha$ で表される外力を下方方向に印加することによって求めることができる。なお、この変位は慣性質量に対して上方方向に加速度が作用する場合に生じる可動構造体の変位と同等である。

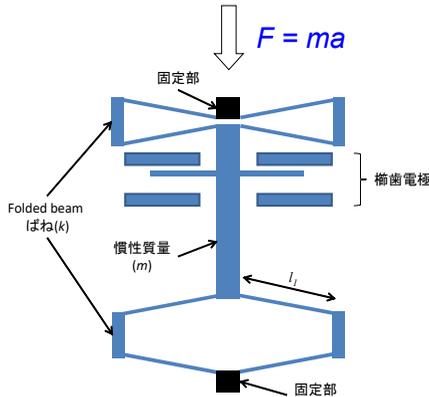


図 3・1 下方方向に加速度 α が構造体土台に印加したときの可動機械構造体の変形 (模式図)

機械系の固有角振動数 ω_n が外部より印加した加速度の角振動数 ω よりも十分大きく設計されているとき、式(2・5a)の関係が成り立ち、加速度に比例した機械系の変位が発生する。このとき、加速度が調和振動する場合には、以下の関係式が成り立つ。

$$x(t) \approx \frac{f}{k} = \frac{m\alpha}{k} = \frac{\alpha}{\omega_n^2} \quad (3 \cdot 1)$$

これより、(a) 加速度に対する変位の比率 (感度) が構造体の固有角振動数のみによって決まること、また、(b) 固有角振動数を大きくすると感度が固有振動数の 2 乗で急激に減少すること、が分かる。これは、サイズモ系原理に基づいた加速度センサでは、高速応答 (すなわち、周波数帯域の拡大) に設計するに従ってセンサ感度が減少することを意味しており、感度と周波数帯域の関係をセンサ原理から制限している。もし加速度センサの高速応答性を犠牲にできるならば、式(3・1)に示すように、慣性質量を大きく、かつ、ばね定数を小さくすることによってセンサ感度を増大させることができる。地震感知のように加速度の変化が緩慢なときには、この設計指針に従ってセンサ感度を大きくすることができる。

3-3-2 機械構造体の設計

上に述べたように、加速度センサの感度は構造体の固有角振動数によって決まるが、また、機械構造体は固有角振動数よりも大きな振動数を持つ加速度変化に応答することができない。このため、センサは固有角振動数を大きく設計するに従って加速度荷重に対して高速に応答することができるようになる（すなわち、センサの周波数帯域が広がる）。実際には、応答する振動数下限がシステム側から決められていることが多い（例えば、車の振動による加速度センサの応答を除去するためにセンサ信号を高域通過フィルタを通して出力することが行われる。このとき、センサ応答周波数範囲は車の振動よりも大きくする必要はある）。したがって、加速度センサの設計においては、固有角振動数の下限（すなわち k/m の下限）の値が決まっているなかで、慣性質量 m とばね定数 k を最適に設計することが実際の課題である。以下にこの2つの機械要素の設計指針を述べる。

A) 慣性質量

センサの感度を高くするために大きく設定することが好ましいが、センサの寸法やプロセスから制限を受ける。また、後述の歯車電極が慣性質量に追加されることを考慮して設計する必要がある。

B) ばね定数

一般に MEMS で用いられる機械ばねは、梁構造体の曲げ変形を利用することが多く、この場合、大変位（例えば、変位 > 梁厚）を考慮しないときには、ばね定数は以下の式によって与えられる。

$$k = K' \frac{EI}{l^3} \approx KEh \left(\frac{w}{l} \right)^3 \quad (3 \cdot 2)$$

ここで、 E は材料のヤング率であり、 I は梁の曲げ剛性である。また、梁の形状を幅 w 、厚さ h 、長さ l としたとき、式(3.2)は幅方向（面内方向）に梁が変位した場合のばね定数を表している。 K' 及び K は梁の固定条件に依存した定数であり、材料力学の教科書に表が掲載されている。図 3.1 には MEMS 加速度センサでよく使用される折り返しビームばねが描かれている。一組の折り返しビームのばね定数は $l = 2l_1$ (l_1 は一つの梁の長さ) とすると、

$$k \approx \frac{Ehw^3}{l_1^3} \quad (3 \cdot 3)$$

である。

ポリシリコンからなる折り返しビームばね ($w: 2 \mu\text{m}$, $h: 2.5 \mu\text{m}$, $l_1 = l_2: 120 \mu\text{m}$) の場合には、ばね定数は 2.8 N/m となる。図 3.1 に示す構造では 2 組の折り返しばねが慣性質量に接続されているために、全体のばね定数は 5.6 N/m となる。この計算値は試作した加速度センサを評価して得られた実験値とよく一致している¹⁾。

C) 減衰係数

減衰比が 0.5 よりも小さくなると図 2.2 に示したように共振周波数付近で振幅が大きくなり、センサ出力の増大が発生する。しかし、センサ出力が周波数に依存することは望ましくないために、加速度センサでは $\omega < \omega_n$ の周波数領域を利用してセンサ出力の周波数依存性を抑えるようにしている。また、減衰比が 0.5 よりも小さいと振幅増大のほか可動構造体の機械振動がいつまでも継続するという問題も発生する。この反面、減衰比をあまりに大きくすると振幅減衰が低い周波数から早く始まることになり、利用できる周波数帯域が狭くなるという問題が起

こる。これらを考慮して、センサでは一般に減衰比が 0.5 付近になるように設計される。減衰比の制御には、センサ封止ガスの圧力を制御することが用いられるが、センサの楕歯電極の狭いギャップ間に発生するスクイーズ減衰を利用することもしばしば用いられる手法である。

■10 群-8 編-3 章

3-4 変位計測

(執筆者：鈴木健一郎) [2018年8月 受領]

加速度がサイズモ系のフレームに作用すると、慣性質量が加速度に比例した変位を発生することを述べた。本節では、慣性質量の微小な変位を電氣的に計測する手法について述べる¹⁾。

3-4-1 差動キャパシタ

機械構造体の微小な変位を計測するのに静電容量変化を利用する電気計測が広く利用されている。図 4・1 に差動キャパシタの基本構造とその動作原理を示す。

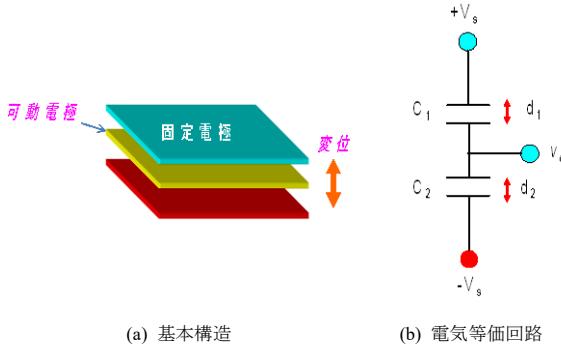


図 4・1 差動キャパシタの基本構造(a)とその電気等価回路(b)

差動キャパシタは、図 4・1(a)に示すように、2 枚の固定電極の中央に可動電極を設けたものであり、2 枚の固定電極の双方に正負逆の電圧 $\pm V_s$ を印加 (図 4・1 (b)) したとき、以下の電圧出力を発生する。

$$V_o = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_s \quad (4 \cdot 1a)$$

ここで、 C_1 及び C_2 は可動電極と上下固定電極のそれぞれとの間の静電容量である。いま、2 個のキャパシタのそれぞれの面積 A が互いに等しいとする。初期ギャップ d_{10} 及び d_{20} を持つ 2 つのキャパシタの可動電極が上方向に Δd だけ変位したとき、図 4・1(b)の回路は、以下の電圧を出力する。

$$V_o = V_s \frac{\frac{A}{d_{10} - \Delta d} - \frac{A}{d_{20} + \Delta d}}{\frac{A}{d_{10} - \Delta d} + \frac{A}{d_{20} + \Delta d}} = V_s \left(\frac{-d_{10} + d_{20}}{d_{10} + d_{20}} + \frac{2\Delta d}{d_{10} + d_{20}} \right) \quad (4 \cdot 1b)$$

ここで、右辺の $d_{10} + d_{20}$ は可動電極とその両側の固定電極との間の初期ギャップの和であるため、可動電極が変位しても変化しない。また、初期ギャップ d_{10} と d_{20} を等しい値に設定すると、出力電圧のオフセット (式(4・1b)右辺の第一項) を小さくすることができる。この結果、差動キャパシタを利用すると可動電極の変位 Δd に比例した出力電圧を得ることができることが分かる。

式(4・1a)では配線などに起因する寄生容量の影響を含めていないが、寄生容量は同式の分母に作用して出力電圧を低減させる原因になる。このため、センサのキャパシタンスを大きくする工夫が必要である。微小な変位に対して大きなキャパシタンス変化を得るためには、図4・1に示した一組の差動キャパシタを幾重にも並列に並べた櫛歯電極キャパシタを利用するとよい。櫛歯電極キャパシタは、固定電極配置の違いによって、図4・2(a)に示す2枚の極性の異なる固定電極を互いに近接して積層した構成(固定電極の配線がやや複雑になる)や、図4・2(b)に示す可動電極の左右に極性の異なる固定電極を設けた構成(デバイスが大きくなる)に分類されるが、いずれの構成においても N 組の櫛歯電極を持つキャパシタの静電容量は以下のように表される。

$$C_{\text{sense}} \approx N \frac{\varepsilon_0 h l}{d_0 \pm \Delta d} \quad (4 \cdot 2)$$

ここで、 l と h はそれぞれ一組の櫛歯キャパシタが互いに対向する長さと同さであり、この積が平行平板キャパシタの重なり領域面積である。式(4・2)は、櫛歯電極構造を利用することによって静電容量を N 倍に増大できることを示している。

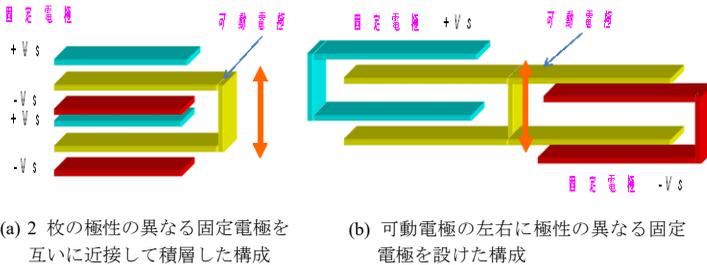


図4・2 櫛歯電極の構造

一般にキャパシタンス回路はインピーダンスが高いために、配線に生じる寄生容量の影響によってノイズが発生しやすいという問題がある。図4・4に示す差動キャパシタンスの出力端子に演算増幅回路を接続すると、増幅回路の入力端子が仮想接地となっているために、配線途中の寄生容量 C_p の影響を低く抑えることができる。このとき、加速度の印加によって以下に示すセンサ出力が発生する。

$$v_0 = - \frac{C_1 - C_2}{C_F} V_s \approx -2V_s \frac{C_0}{C_F} \frac{\Delta d}{d_0} \quad (4 \cdot 3)$$

C_0 は初期ギャップ d_0 のときの C_1 と C_2 のそれぞれの静電容量である。式(4・3)から、図4・3に示す回路を用いると可動電極変位に比例したセンサ出力を得ることができることが分かる。図4・3のシャント抵抗 R_F は、 C_F に電荷が蓄積されて演算増幅器が飽和することを防ぐために挿入されている。 $R_F \gg \frac{1}{\omega C_F}$ にするとフィードバックインピーダンスから R_F の影響を除くことができて式(4・3)の関係を得ることができる。

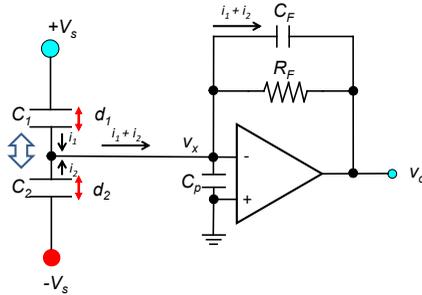


図 4・3 差動キャパシタ検出回路（差動キャパシタに直流電圧が印加されている）

3-4-2 静電容量検出回路

静電容量検出回路として測定対象キャパシタに交流電源を接続した変調回路方式がよく用いられる。以下に、先に述べた差動キャパシタ回路の一方の静電容量 C_1 の検出を例にして説明する（図 4・4 の差動キャパシタ検出を行う場合には、 $-V_s$ を印加した C_2 の回路を更に追加するとよい）。図 4・4 はトランスインピーダンス増幅回路を利用したキャパシタ検出回路を示している。図中の $C(x)$ は x 方向のギャップ長に依存した可変キャパシタである。ここで交流電圧 v_s をキャパシタンス $C(x)$ に印加したとき、キャパシタを流れる電流は、

$$i_c = \frac{d}{dt} (C v_s) = C(x) \frac{dv_s}{dt} + v_s \frac{\partial C(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = j\omega C(x) v_s + v_s \frac{\partial C(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (4 \cdot 4)$$

となる。ただし、 $v_s = V_{s0} \cos \omega t$ である。この右辺第二項は可動電極の速度に比例した電流が生じることを示しているが、この項を抑えて右辺第一項のみを残すために、機械の共振周波数よりも大きな周波数を持つ交流電圧をキャパシタに印加することにする。このとき、機械の共振周波数を超えた周波数で振動させられるために振動速度が非常に小さな値となるため、右辺第二項の電流を無視することができる。図 4・4 のトランスインピーダンス増幅回路のフィードバックインピーダンス $Z_F (= R_F // C_F)$ には式 (4・4) 右辺の第一項に示す電流が流れ、増幅回路の出力電圧は以下のようになる。

$$v_o = -Z_F i_c \approx -j\omega Z_F v_s C(x) \quad (4 \cdot 5)$$

ここで、 ω は交流電源の角振動数である。式 (4・5) は、キャパシタンス $C(x)$ に比例した検出電圧が得られることを示している。また、キャパシタに印加する検出信号の周波数がセンサの機械共振周波数よりも十分に高い周波数となるように設定されているときには、電気信号による機械構造体の振動が低く抑えられるために、検出系電気信号による機械構造体への影響をなくすることができるというこ

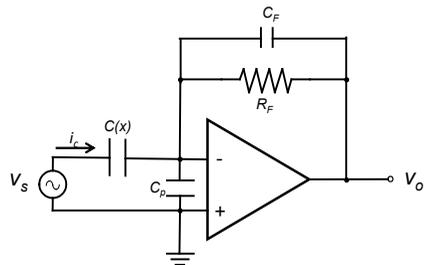


図 4・4 トランスインピーダンス増幅回路を利用したキャパシタ検出回路（キャパシタに交流電圧が印加されている）

とは重要である。

静電容量 $C(x)$ が加速度のために正弦振動 (角振動数: ω_m) の変化を受けた場合を考えてみよう。この場合、静電容量 $C(x)$ は以下のように時間の関数となる。

$$C(x) : C(t) = C_0(1 + m \cos \omega_m t), \quad \omega_m \ll \omega \quad (4 \cdot 6)$$

ここで、 $m (< 1)$ は変調指数であり、 ω は検出回路の角振動数である。したがって、トランスインピーダンス増幅回路の出力電圧は式(4.5)より以下のように与えられる。

$$v_o \approx -j\omega Z_F V_{s0} C_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega t = v_o(t) \cos \omega t \quad (4 \cdot 7)$$

これは、 ω の角振動数を持つ交流電源を ω_m の角振動数を持つ正弦波で振幅変調した変調信号であることを示している。図 4.5 はこの出力信号を模式的に示したものであり、出力信号 v_o は、交流電源の角振動数 ω と同じ角振動数 (通常 0.1~1 MHz) で振動する電圧である。一方、 $v_e(t)$ は出力信号の振幅の包絡線であり、センサの静電容量 $C(x)$ に比例している。したがって、 $v_e(t)$ を検出することによって、加速度の大きさを測定することができる。図 4.6 に示す電気回路には $v_e(t)$ を検出するための Peak Detector 回路が描かれている。RPDCPD の時定数を $1/\omega$ よりも大きくとることにより、 ω の角振動数を持つ電気信号を除去して包絡線信号を出力することができる。

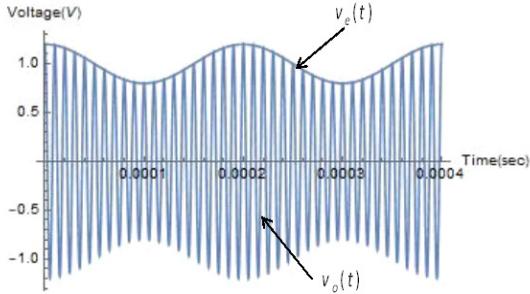


図 4.5 図 4.4 の回路から出力される振幅変調信号の模式図 (縦軸の大きさは任意) : $\omega = 100 \text{ kHz}$, $\omega_m = 5 \text{ kHz}$, $m = 0.2$.

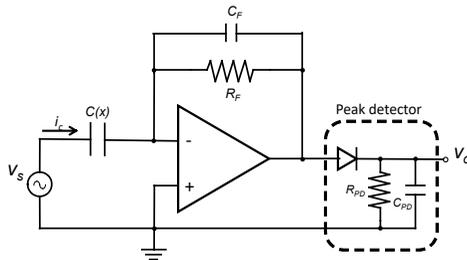


図 4.6 図 4.4 の回路に Peak Detector を追加したキャパシタンス検出回路

■10 群-8 編-3 章

3-5 加速度センサの例

(執筆者：鈴木健一郎) [2018年8月 受領]

文献 1) には Analog Devices ADXL150 加速度センサが記載されている。振動の減衰係数については減衰理論から計算された値が実験値よりも約 100 倍も小さいという課題が残されているが、このデバイスの測定値が、集中モデルを用いた材料力学、振動工学、電子回路の基本的な計算値と非常によく一致することが報告されている。減衰の大きさについては、マクロ構造体の設計と同じように、測定値を利用して理論を補正する必要がある。

以下、ADXL150 加速度センサの機能仕様と形状から計算したデバイス動作の代表的な数値を示す。

1) センサの変位感度：

仕様：動作レンジ (± 50 g)、機械共振周波数 (24 kHz)

式(3・1)より、慣性質量は、50 g の加速度が印加されたときに 20.3 nm 変位する。

2) ノイズ (変位)：

仕様：1 mg/Hz^{1/2} (10~1000 Hz)

1 kHz 帯域の加速度ノイズは 32 mg になる。これは、0.013 nm の変位ノイズに相当する。

3) ノイズ (静電容量)：

形状：初期ギャップ (1.3 μ m)

加速度が印加されていない初期状態の静電容量約 100 fF が得られる。このことから、上記変位ノイズは 1 aF の静電容量変動に相当することが分かる。

4) オフセット：

仕様：供給電源電圧 ($V_s = \pm 5$ V)

図 4・1 に示した櫛歯電極ギャップの大きさが 1% 異なるとき、0.01 μ N の静電気力のアンバランスが発生して、慣性質量を 2 nm 変位させる。これは 5 g の加速度がデバイスのオフセットとなることを示している。

以上の数値より、MEMS 加速度センサにおいては nm レベルの形状を精密に制御することがプロセス及び実装において要求されていることが分かるが、実現することは困難である。このため、電気回路によるセンサの補正が効果的に利用されている。

■10 群-8 編-3 章

3-6 まとめ

(執筆者：鈴木健一郎) [2018年8月受領]

ポリシリコンを構造体とするサーフェイスマイクロマシニングプロセスはよく研究されており、Analog Devices 社が製品化に成功している。しかし、ポリシリコンの内部残留応力を低減するために必要とされる 1200℃のアニール工程が検出回路との集積化に大きな障壁となっていることから、ポリシリコン構造体を持つ集積化センサを製品化できる企業が制限されている。近年、STMicroelectronics がエピタキシャルポリシリコンを構造体とする加速度センサの製品化に成功した。センサ構造体を従来のものよりも数十倍も厚く堆積できるために残留応力の問題が著しく緩和された。また、このプロセスで使用される温度を 600℃と低温にすることにも成功している。

現在、LSI 回路との集積化を行うために更なる低温化の研究がなされており、例えば、集積回路を作製した後に、回路の上に電気めっきを用いて金属からなるセンサ構造体を作製する試みなどがなされている。金属構造体の機械的な長期信頼性評価が今後の課題である。

■10 群-8 編-3 章

補遺 3-A 機械システムと電気回路の相似関係

(執筆者：鈴木健一郎) [2018年8月 受領]

図 2・3 に示す機械システムの慣性質量 m に x 方向に外力 $f(t)$ が働くとき、以下の運動方程式が成り立つ。

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) \quad (3\cdot A\cdot 1)$$

ここで、 x は慣性質量の x 軸方向の変位である。上式は速度 $v (= \frac{dx}{dt})$ を用いて以下のように書き換えることができる。

$$m\dot{v} + bv + k \int v \, dt = f(t) \quad (3\cdot A\cdot 2)$$

一方、図 2・3 に示す LCR 直列回路ではキルヒホッフのループ電圧回路法則 (KVL) より以下の関係が得られる。

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = e(t) \quad (3\cdot A\cdot 3)$$

以上の式 (3・A・2) と (3・A・3) の関係より、表 2・1 の対応関係を得ることができ、また、サイズモ機械系と LCR 直列電気回路は同じ法則に従って変化することが分かる²⁾。

式 (3・A・3) に以下の置き換えをすることによって電流の周波数応答を得ることができる。

$$i = I_0 e^{j\omega t}, \quad e = E_0 e^{j\omega t} \quad (3\cdot A\cdot 4)$$

すなわち、

$$i = \frac{E_0}{R + j\omega\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)} e^{j\omega t} \quad (3\cdot A\cdot 5)$$

これを時間で積分することにより、電荷 q が得られる。

$$q = \frac{E_0}{j\omega R - \omega^2\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)} e^{j\omega t} \quad (3\cdot A\cdot 6)$$

機械システムの変位は、式 (3・A・6) を表 1・1 の置き換えをすることにより、以下のように得られる。

$$x = \frac{1/m}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega \frac{b}{m}} f(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} \frac{f(t)}{k} \quad (3\cdot A\cdot 7)$$

結局、この式 (3・A・7) を実数で表記すると式 (2・4) が得られる。

■演習問題

- [3.1] $t=0$ のとき $x(t)=dx(t)/dt=0$ の場合に式(2・2)のラプラス変換を利用して式(2・3)を導け。
 [3.2] 長さ l の両端固定梁の中央に力を印加したときの梁のばね定数は以下のように表される。

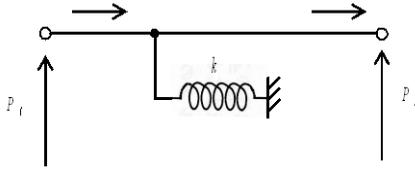
$$k = \frac{192EI}{l^3}$$

この関係と複合ばねの合成公式を用いて式(3・3)の関係を導け。

- [3.3] x が 10 kHz, v_s が 1 MHz で振動した場合について式(4・4)の第二項の大きさを第一項と比較して評価せよ。
 [3.4] 図問 3・1 は一端が外枠に固定されたばねが経路の途中に設けられた機械系モデルを示したものである。経路の左端位置を端子 1, 右端位置を端子 2 とする。端子 1 に働く力と速度を P_1, \dot{x}_1 , また端子 2 に働く力と速度を P_2, \dot{x}_2 とするとき, 端子 1 と端子 2 の間には下記の関係がある。

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = [Z] \begin{pmatrix} P_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

ここで, $[Z]$ は伝達関数である。力 P_1, P_2 が調和振動するとき, この伝達関数をばね定数 k を用いて表せ。また, この機械系モデルと等価な電気系モデルを示せ。



図問 3・1 経路の途中にばねが設けられた機械系の 4 端子回路表示

■参考文献

- 1) S.D. Senturia : “Mirosystem Design,” Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- 2) 永井健三, 近野 正(編) : “電子回路素子としての電気・機械振動子とその応用,” コロナ社, 1974.