■12 群（電子情報通信基礎）－ 3 編（統計・確率）

1 章　確率の基礎概念

（執筆者：加藤　剛）[2009 年 3 月 受領]

■概要■

確率は，厳密には集合関数の特別な場合であって，可測空間と呼ばれる空間を前提にして初めて定義される．可測空間とは，与えられた集合と，その集合をもとに構成される集合族の組から構成される．この集合族は σ-集合体といい，補集合，及び可算無限個の和演算と積演算に関して閉じている．この σ-集合体に属する集合に対して 0 から 1 の間の値を割り当てる測度として，確率が定義されるのである．本章では，可測空間の構成，その空間上で定義される確率，そして条件付き確率について述べる．

【本章の構成】

本章では，可測空間の定義を 1–1 節で行い，1–2 節において測度の定義と性質を述べるとともに確率の定義をする．更に，1–3 節で，条件付き確率の定義と，それを応用したベイズの定理について述べる．

■12 群 - 3 編 - 1 章

1-1 可測空間

（執筆者：加藤　剛）［2009 年 3 月 受領］

以下，Ω は任意の集合を表し，2^Ω は Ω の部分集合全体からなる集合族を表すものとする．

定義 1–1.1. $\mathscr{F} \subset 2^\Omega$ が次の条件を満たすとき，$\mathscr{F}$ は Ω 上の **σ-集合体** (sigma-field) であると言う．

(i) 空集合 $\emptyset$ について，$\emptyset \in \mathscr{F}$．

(ii) $A \in \mathscr{F} \ \Rightarrow\ A^c \in \mathscr{F}$．ここで，$A^c$ は A の補集合を表す．

(iii) $A_i \in \mathscr{F}\ (i = 1, 2, \ldots) \ \Rightarrow\ \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$．

本章定義 1–1.1 に基づいて，更に次の概念が定められる．

定義 1–1.2.

(i) $\mathscr{F}$ が Ω 上の σ-集合体であるとき，Ω と $\mathscr{F}$ の組 $(\Omega, \mathscr{F})$ を**可測空間** (measurable space) と呼ぶ．

(ii) $(\Omega, \mathscr{F})$ が可測空間であるとき，$\mathscr{F}$ に属する集合を **$\mathscr{F}$-可測集合** (measurable set) と呼ぶ．

σ-集合体に関して，次の結果が成り立つ．

定理 1–1.1. $\mathscr{F}$ を Ω 上の σ-集合体とする．

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$．

(2) $A, B \in \mathscr{F} \ \Rightarrow\ A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B,\ A \triangle B \in \mathscr{F}$．ただし，$A \backslash B \equiv A \cap B^c$（差集合），$A \triangle B \equiv (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$（対象差）である．

(3) $A_i \in \mathscr{F}\ (i = 1, 2, \ldots) \ \Rightarrow\ \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

(4) $A_i \in \mathscr{F}\ (i = 1, 2, \ldots) \ \Rightarrow\ \displaystyle\limsup_{n\to\infty} A_n,\ \liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{F}$． ここで，

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

である．特に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ が存在すれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{F}$ である．

証明 (1) $\Omega = \emptyset^c \in \mathscr{F}$．

(2) $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset\ (i = 3, 4, \ldots)$ とおけば，

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}.$$

また，これより，

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{F}.$$

$A \backslash B,\ A \triangle B \in \mathscr{F}$ については，定義より明らか．

(3) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathscr{F}.$

(4) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} A_n,\ \liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{F}$ は，定義より明らか．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ が存在するならば，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{F}. \quad \square$$

定理 1–1.2. $\mathscr{A}$ を Ω の部分集合からなる集合族とするとき，$\mathscr{A}$ を含む最小の σ-集合体が存在する．

証明 $\tilde{\mathscr{G}}$ を，$\mathscr{A}$ を含むあらゆる σ-集合体からなる集合とする．$\mathscr{A} \subset 2^{\Omega}$ より $2^{\Omega} \in \tilde{\mathscr{G}}$ であるから，$\tilde{\mathscr{G}} \neq \emptyset$．そこで，$\mathscr{F}_0 = \cap\{\mathscr{F} : \mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}}\}$ と定義すると，$\mathscr{F}_0$ は明らかに $\mathscr{A}$ を含む．更に，$\mathscr{F}_0$ は σ-集合体である．なぜならば，任意の $\mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}}$ について $\emptyset \in \mathscr{F}$ なので，$\emptyset \in \mathscr{F}_0$．また，

$$A \in \mathscr{F}_0 \Rightarrow \text{任意の } \mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}} \text{ について } A \in \mathscr{F} \Rightarrow \text{任意の } \mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}} \text{ について } A^c \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_0.$$

更に，

$$\begin{aligned} A_i \in \mathscr{F}_0\ (i = 1, 2, \ldots) \quad &\Rightarrow \quad \text{任意の } \mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}} \text{ について } A_i \in \mathscr{F} \\ &\Rightarrow \quad \text{任意の } \mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}} \text{ について } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}_0 \end{aligned}$$

も成立するからである．次に，$\mathscr{F}_0$ が $\mathscr{A}$ を含む σ-集合体の中で最小であることを示す．$\tilde{\mathscr{G}}$ と $\mathscr{F}_0$ の定義から，任意の $\mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}}$ について，$\mathscr{A} \subset \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ である．$\mathscr{F}_0$ は σ-集合体であり，$\mathscr{F} \in \tilde{\mathscr{G}}$ は $\mathscr{A}$ を含む σ-集合体であるから，結局，$\mathscr{F}_0$ は $\mathscr{A}$ を含む σ-集合体の中で最小となる． $\square$

本章定理 1–1.2 に基づいて，次の定義を行う．

定義 1–1.3. $\mathscr{A}$ を Ω の部分集合からなる集合族とするとき，$\mathscr{A}$ を含む最小の σ-集合体を $\mathscr{A}$ **から生成される σ-集合体**と呼び，記号 $\sigma(\mathscr{A})$ で表す．

■12 群 - 3 編 - 1 章

1-2 測度

（執筆者：加藤　剛）［2009 年 3 月 受領］

本章 1–1 節で定義した可測空間上に，測度という概念を定義する．

定義 1–2.1.

(i) $\mathscr{A}$ を Ω の部分集合からなる集合族とし，$\overline{R}=R\cup\{\pm\infty\}$ を拡張された実数空間とする．このとき，関数 $\mu:\mathscr{A}\to\overline{R}$ を，$\mathscr{A}$ 上の集合関数という．

(ii) $(\Omega,\mathscr{F})$ を可測空間とし，$\mathscr{F}$ 上で定義された集合関数 μ が次の条件を満たすとき，μ は**有限加法的** (finitely additive) である，または，**有限加法性を持つ**という．

$$A,B\in\mathscr{F} \text{ かつ } A\cap B=\emptyset \ \Rightarrow\ \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B).$$

次の結果は，有限加法的集合関数の性質について述べたものである．

定理 1–2.1. $(\Omega,\mathscr{F})$ を可測空間，μ を $\mathscr{F}$ 上で定義された有限加法的集合関数，かつ，$A,B,A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{F}$ とする．このとき，以下の (1), (2), (3), (4) が成り立つ．

(1) $A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)\ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).$

(2) $-\infty<\mu(A)<\infty$ を満たす $A\in\mathscr{F}$ が存在すれば，$\mu(\emptyset)=0.$

(3) 任意の $A\in\mathscr{F}$ について $0\leq\mu(A)\leq+\infty$ であるとき，

$$A\subset B\ \Rightarrow\ \mu(A)\leq\mu(B)\quad\text{（単調性）}.$$

(4) 任意の $A\in\mathscr{F}$ について $0\leq\mu(A)\leq+\infty$ であるとき，

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\quad\text{（劣加法性）}.$$

証明 (1) 数学的帰納法によって示す．$n=1$ のときは自明．定理の主張が $n=k$ のときに正しいと仮定する．このとき，有限加法性と仮定を利用して，

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\right)=\mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\cup A_{k+1}\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)+\mu(A_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i)+\mu(A_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\mu(A_i).$$

(2) $-\infty<\mu(A)<\infty$ を満たす $A\in\mathscr{F}$ が存在すれば，有限加法性より $\mu(A)=\mu(A\cup\emptyset)=\mu(A)+\mu(\emptyset)$ なので，$\mu(\emptyset)=\mu(A)-\mu(A)=0.$
(3) $A\subset B$ ならば，$B=A\cup(B\backslash A)$ と有限加法性より，

$$\mu(B)=\mu(A\cup(B\backslash A))=\mu(A)+\mu(B\backslash A)\geq\mu(A).$$

(4) 数学的帰納法による．$n=1$ のときは明らかに成り立つ．$n=k$ まで成立していると仮定する．このとき，

$$\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\cup A_{k+1}=\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\cup\left(A_{k+1}\backslash\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)$$

より，

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)+\mu\left(A_{k+1}\backslash\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)+\mu(A_{k+1})\\ &\leq \sum_{i=1}^{k}\mu(A_i)+\mu(A_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\mu(A_i).\end{aligned}$$ □

次に，集合関数についての有限加法性を加算無限個の演算に拡張した概念を考える．

定義 1−2.2. $(\Omega,\mathscr{F})$ を可測空間とする．

(i) $\mathscr{F}$ 上で定義された集合関数 μ が次の条件を満たすとき，μ は **σ-加法的** (sigma-additive) である，または，**σ-加法性を持つ**という．

$$A_i\in\mathscr{F}\ (i=1,2,\ldots)\ \text{について，}\ A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)\ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

(ii) $\mu:\mathscr{F}\to[0,+\infty]$ が $\mu(\emptyset)=0$ かつ σ-加法性を満たすとき，μ は $(\Omega,\mathscr{F})$ 上の**測度** (measure) であるという．

(iii) μ が $(\Omega,\mathscr{F})$ 上の測度であるとき，3 つの組 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ を**測度空間** (measure space) と呼ぶ．

(iv) 測度空間 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ において，$\mu(\Omega)<\infty$ のとき，μ は**有限測度** (finite measure) であるという．

測度空間 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ において，次の結果が成り立つ．

定理 1−2.2. $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ を測度空間とし，$A_i\in\mathscr{F}\ (i=1,2,\ldots)$ とする．

(1) μ は有限加法的である．

(2) $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots\ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$

(3) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ であり，かつ $\mu(A_n) < \infty$ なる A_n が存在すれば，

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(4) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. （劣加法性）

証明 (1) σ-加法性の定義において，

$$A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset \ (n = 3, 4, \ldots)$$

とおけばよい．
(2) $B_1 = A_1, B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ と定めると，$B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. したがって，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(3) ある k について $\mu(A_k) < \infty$ であるとする．このとき，$C_n = A_k \backslash A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と定めれば，$C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n \subset \cdots$ であり，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_k \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

が成り立つ．したがって，(2) の結果より

$$\mu(A_k) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \mu\left(A_k \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_k) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

となるので，求める結論を得る．
(4) (1) の結果より μ は有限加法的でもあるので，本章定理 1–2.1 の (4) より，任意の k について

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

集合 $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ は k に関して単調増加でなので，(2) より

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad \square$$

以上の準備のもとで，確率を定義する．

定義 1–2.3.

(i) 測度空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ において $P(\Omega)=1$ であるとき, $(\Omega,\mathscr{F},P)$ を特に**確率空間** (probability space) と呼ぶ．このとき, Ω を**標本空間** (sample space), $\mathscr{F}$ を**事象系** (system of events), P を**確率** (probability) または**確率測度** (probability measure) という．また，Ω の要素を**根元事象** (elementary event)，$\mathscr{F}$ の要素を**事象** (event) と呼ぶ.

(ii) 確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ において，事象 $A,B\in\mathscr{F}$ に対し，補集合 A^c を A の**余事象** (complementary event)，和集合 $A\cup B$ を A と B の**和事象** (sum event)，積集合 $A\cap B$ を A と B の**積事象** (product event) と呼ぶ．また，空集合 $\emptyset$ を**空事象** (empty event) と呼ぶ.

確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ が与えられると，任意の事象 $A\in\mathscr{F}$ に対して，その確率 $P(A)\in[0,1]$ が確率測度 P によって定まる．

■12 群 - 3 編 - 1 章

1-3 条件付き確率

（執筆者：加藤　剛）［2009 年 3 月 受領］

この節では，条件付き確率という概念について説明する．

定義 1–3.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．$P(B) > 0$ を満たす事象 $B \in \mathscr{F}$ と任意の事象 $A \in \mathscr{F}$ について，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を，B が与えられたときの A の**条件付き確率** (conditional probability) と呼ぶ．

以下の議論では，特に断りのない限り，確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を前提とする．まず，条件付き確率について，次の定理を示す．

定理 1–3.1.

(1) $P(A|B) \geq 0$.

(2) $P(\Omega|B) = 1$.

(3) $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$.

(4) $P(A) > 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.　**（乗法定理）**

証明 (1) 条件付き確率の定義より明らか．

(2) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.

(3) $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ かつ $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$ なので，

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} &= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B). \end{aligned}$$

(4) 条件付き確率の定義より $P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$, $P(B|A)P(A) = P(B \cap A)$ なので，

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \quad \square$$

条件付き確率から，事象の独立性という概念が導かれる．

定義 1–3.2. 条件付き確率 $P(A|B)$ が B と無関係であるとき，すなわち，

$$P(A|B) = P(A)$$

が成り立つとき，A は B と（確率 P に関して）**独立** (independent) であるという．

実は, A が B と独立であることと, B が A と独立であることは同値である．そこで, A が B と独立である（または B が A と独立である）とき, A と B は**互いに独立** (mutually independent) であるという．このことは, 次の定理から保証される．

定理 1–3.2. $P(A) > 0, P(B) > 0$ とするとき，次の 3 つの条件は同値である．

(1) $P(A|B) = P(A)$.

(2) $P(B|A) = P(B)$.

(3) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

証明 (1) が成り立つならば,

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

したがって，(3) が成り立つ．また，(3) が成り立つならば,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

より (2) が成り立つ．更に，(2) が成り立つならば，本章定理 1–3.1 の (4) より，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B)P(A)}{P(B)} = P(A).$$

よって，(1) が成り立つ． □

事象の独立に関して，次の結果が成り立つ．

定理 1–3.3. 事象 A と B が互いに独立ならば，A^c と B，A と B^c，A^c と B^c のいずれの組も互いに独立になる．

証明 A と B が互いに独立ならば，本章定理 1–3.2 より，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$. これを用いると,

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = \{1 - P(A)\}P(B) = P(A^c)P(B), \\
P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\{1 - P(B)\} = P(A)P(B^c), \\
P(A^c \cap B^c) &= P(A^c) - P(A^c \cap B) = P(A^c) - P(A^c)P(B) = P(A^c)\{1 - P(B)\} = P(A^c)P(B^c).
\end{aligned}$$

したがって，本章定理 1–3.2 より求める結論を得る． □

条件付き確率の応用として，有名なベイズの定理がある．

定理 1–3.4. (ベイズの定理, Bayes' theorem) 事象の列 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が,

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \quad P(A_i) > 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たすとする．このとき，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ と $P(B) > 0$ なる事象 B について，次の等式が成り立つ.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

証明 条件付き確率の定義と本章定理 1–3.1 の (4) から,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}.$$

右辺の分母 $P(B)$ については次の変形が成り立つので，求める等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} (B \cap A_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j). \quad \square \end{aligned}$$