■12 群（電子情報通信基礎）－ 3 編（統計・確率）

3 章 確率変数（ベクトル）列の収束

（執筆者：蛭川潤一）[2014 年 4 月 受領]

■概要■

確率変数列，及び，確率ベクトル列の収束において，2 つの近似の形式が中心的な役割を果たす．一つ目の形式では与えられた確率変数（ベクトル）が別の確率変数（ベクトル）によって近似される．もう一方の形式では，与えられた分布関数が別の分布関数によって近似される．前者の形式として，確率収束，概収束，平均収束が挙げられ，後者の形式として，法則収束が挙げられる．これらの収束の形式の互いの関係性を明らかにすることは重要である．また，スラツキーの定理やデルタ法といった，応用上，極めて有用な定理を得ることができる．これらの収束の概念を用いて，ランダウの記号の確率版である確率有界が定義できる．

これらの収束に関する重要な定理として，確率収束と概収束に関係する大数の法則と，法則収束に関係する中心極限定理が挙げられる．大数の法則は，確率変数の和の確率収束と概収束に関係し，中心極限定理は，確率変数の和の法則収束に関係する．大数の法則と中心極限定理は，独立同一分布（i.i.d.）の仮定を緩めた場合に拡張される．

上記の収束のうちのいずれかの意味で，確率変数が収束するとき，モーメント（期待値）の収束については何が言えるかが問題となる．一様可積分性という概念がこの問いの一つの答えになる．一様可積分性を用いて，確率変数の収束とモーメントの収束の関係が明らかになる．

確率変数の収束を拡張して，確率測度の収束について考えることができる．重要な例の一つは，区間上の連続関数の空間の場合である．応用例として，中心極限定理の拡張である汎関数中心極限定理が導かれる．

【本章の構成】

本章では，確率変数列，及び，確率ベクトル列の収束について述べる．3-1 節では，確率変数（ベクトル）列の収束の型について述べる．確率収束（3-1-1 項），概収束（3-1-2 項），平均収束（3-1-3 項），法則収束（3-1-4 項）をそれぞれ定義して，それらの関係について調べる．また，3-1-5 項では，ランダウの記号の確率版である確率有界について述べる．3-2 節では，極限定理について述べる．3-2-1 項では，独立同一分布（i.i.d.）の場合の大数の法則と中心極限定理について述べる．また，3-2-2 項では，大数の法則と中心極限定理を非 i.i.d. の場合に拡張する．3-3 節では，モーメントの収束と一様可積分性について述べる．3-4 節では，確率変数の収束を確率測度の収束へ拡張する．また，重要な応用例として，汎関数中心極限定理について述べる．

■12 群 - 3 編 - 3 章

3-1 確率変数（ベクトル）列の収束の型

（執筆者：蛭川潤一）［2014 年 4 月 受領］

統計学の応用において，2 つの近似の形式が中心的な役割を果たす．一つ目の形式では与えられた確率変数（ベクトル）が別の確率変数（ベクトル）によって近似される．もう一方の形式では与えられた分布関数が別の分布関数によって近似される．前者の形式に関して，確率変数列の収束の 3 つの形式について 3-1-1 項，3-1-2 項，3-1-3 項で紹介する．後者の近似の形式については 3-1-4 項で紹介する．これらの収束の概念を用いて，ランダウの記号 $O(\cdot)$, $o(\cdot)$ の確率版が定義できる．ランダウの記号の確率版である確率有界については 3-1-5 項で紹介する．

3-1-1 確率収束

$X_1, X_2, \ldots$ と X を確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上の確率変数とする．任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

が成り立つとき，X_n は X に確率収束するといい，$X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X$ や $p\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$ と表す．

3-1-2 概収束

$X_1, X_2, \ldots$ と X を確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上の確率変数とする．

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1$$

が成り立つとき，X_n は X に概収束するといい，$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ や $p1\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$ と表す．概収束と同値な条件は，任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_m - X| < \varepsilon, \text{ for all } m \geq n\} = 1$$

で与えられる．

(1) 確率収束と概収束の関係

Theorem 1. 概収束 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ は，確率収束 $X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X$ を意味する．

この定理の逆は一般には成り立たない．しかしながら，十分早く確率収束すれば，概収束することが分かる．

Theorem 2. 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} < \infty$$

であれば，$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ である．

3-1-3 平均収束

$X_1, X_2, \ldots$ と X を確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上の確率変数とする．$r > 0$ について

$$\lim_{n \to \infty} E\left|X_n - X\right|^r = 0$$

が成り立つとき，X_n は X に r-次平均収束するといい，$X_n \stackrel{rth}{\to} X$ や $L_r\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$ と表す．$0 < s < r$ について

$$X_n \stackrel{rth}{\to} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \stackrel{sth}{\to} X$$

が成り立つ．

(1) 確率収束と平均収束の関係

Theorem 3. 平均収束 $X_n \stackrel{rth}{\to} X$ は，確率収束 $X_n \stackrel{\mathscr{P}}{\to} X$ を意味する．

この定理の逆は一般には成り立たない．しかしながら，有界な確率変数でおさえられる場合には，確率収束すれば，平均収束することが分かる．

Theorem 4. 確率収束 $X_n \stackrel{\mathscr{P}}{\to} X$ が成り立つとし，$E\left|Y\right|^r < \infty$ であるような確率変数 Y に対して，すべての n について $P\left(\left|X_n\right| \leq \left|Y\right|\right) = 1$ であると仮定する．そのとき，平均収束 $X_n \stackrel{rth}{\to} X$ が成り立つ．

(2) 概収束と平均収束の関係

一般に，平均収束は概収束を意味しない．しかしながら，十分早く平均収束すれば，概収束することが分かる．

Theorem 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left|X_n - X\right|^r < \infty$$

であれば，$X_n \stackrel{a.s.}{\to} X$ である．

確率収束の場合と同様に，有界な確率変数でおさえられる場合には，概収束すれば，平均収束することが分かる．

Theorem 6. 概収束 $X_n \stackrel{a.s.}{\to} X$ が成り立つとし，$E\left|Y\right|^r < \infty$ であるような確率変数 Y に対して，すべての n について $P\left(\left|X_n\right| \leq \left|Y\right|\right) = 1$ であると仮定する．そのとき，平均収束 $X_n \stackrel{rth}{\to} X$ が成り立つ．

3-1-4 法則収束

分布関数の列 $F_1(\cdot), F_2(\cdot), \ldots$ と分布関数 $F(\cdot)$ について考える．それらの分布関数を持つような確率変数をそれぞれ，$X_1, X_2, \ldots$ と X とする．すべての F の連続点 t において

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$$

であるときに X_n が X に法則収束するといい，$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ や $\mathscr{L}(X_n) \to \mathscr{L}(X)$ と表す．法則収束の定義は分布関数 F_n と F によって定式化されているので，より直接的に $F_n \Rightarrow F$ と書かれることもある．

法則収束は応用上最も多く使われる収束であり，中心極限定理に現れる収束の型である．法則収束は，分布収束や弱収束と呼ばれることもある．次の定理により，多変量確率ベクトルの分布関数の収束を単変量確率変数の分布関数の収束に帰着することができる．

Theorem 7 (Cramér Wold device)**.** $\{\boldsymbol{X}_n\}$ を m-次元確率ベクトル列とする．このとき $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \boldsymbol{X}$ である必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ に対して $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}$ が成立することである．

（1）法則収束と確率収束の関係

Theorem 8. **(i)** 確率収束 $X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X$ は，法則収束 $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ を意味する．

(ii) ある定数に確率収束すること $X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} c$ は，ある定数に法則収束すること $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} c$ と同値である．

更に，以下の 2 つの定理は応用上有用である．

Theorem 9 (スラツキー（Slutsky）の定理)**.** $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots, X$ を確率変数とする．$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\mathscr{P}} c$ を満たすとする．ここに，c はある有限な定数とする．そのとき，以下が成り立つ．

(i) $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} (X, c)$,

(ii) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X + c$,

(iii) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} cX$,

(iv) $c \neq 0$ であれば $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X/c$.

Remark 1. **(i)** 確率変数 Y に対して，$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\mathscr{P}} Y$ であっても $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} (X, Y)$ は一般には成り立たない．$Y_n \xrightarrow{\mathscr{P}} Y$ を満たす任意の確率変数 Y に対して，$(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} (X, Y)$ が成り立つとき X_n は X に安定収束するという．

(ii) $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots, X$ を確率変数とする．$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ かつ $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathscr{P}} 0$ を満たすとする．定理の **(ii)** より，$Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ である．$X_n - Y_n \xrightarrow{\mathscr{P}} 0$ であるとき，X_n と Y_n は漸近同等であるという．

Theorem 10 (デルタ法)**.** $\{\boldsymbol{X}_n\}$ を m-次元確率ベクトルの列とする．$g(\boldsymbol{x})$ を $\mathbb{R}^m$ 上で定義された微分可能な実数値関数とする．また，$\{c_n\}$ を $n \to \infty$ のとき $c_n \nearrow \infty$ となる正数列とする．このとき，$c_n(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{a}) \xrightarrow{\mathscr{D}} \boldsymbol{X}$ ならば

$$c_n\{g(\boldsymbol{X}_n)-g(\boldsymbol{a})\}-\partial_{\boldsymbol{x}}g(\boldsymbol{a})'c_n(\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{a})\xrightarrow{\mathscr{P}}0$$

である．ここに，$\partial_{\boldsymbol{x}}g(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}g(\boldsymbol{x}),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m}g(\boldsymbol{x})\right)'$ である．特に，$c_n\{g(\boldsymbol{X}_n)-g(\boldsymbol{a})\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\partial_{\boldsymbol{x}}g(\boldsymbol{a})'\boldsymbol{X}$ である．

（2）法則収束の一様性

法則収束 $F_n\Rightarrow F$ に関して，各点収束が一様に成り立つかに興味がある．

Theorem 11. $F_n\Rightarrow F$ であり，F が連続であるならば

$$\lim_{n\to\infty}\sup_t|F_n(t)-F(t)|=0$$

が成り立つ．

（3）漸近正規性

法則収束の最も重要な例は，正規分布に収束する場合である．

Definition 1. 確率変数列 $\{X_n\}$ は，十分大きいすべての n について $\sigma_n>0$ であり

$$\frac{X_n-\mu_n}{\sigma_n}\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,1)$$

であるとき，「平均」μ_n，「分散」σ_n^2 の漸近正規であるといい，$AN\left(\mu_n,\sigma_n^2\right)$ と表す．

3-1-5 確率有界

$\{X_n\}$ を確率変数列とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある M が存在して

$$\sup_n P\{|X_n|\geq M\}<\varepsilon$$

となるとき，$\{X_n\}$ を確率有界であるといい，$X_n=O_P(1)$ と表す．より一般的に，2 つの確率変数列 $\{X_n\},\{Y_n\}$ が $X_n/Y_n=O_P(1)$ であるときに，$X_n=O_P(Y_n)$ と記す．

一方，確率変数列 $\{X_n\}$ が $X_n\xrightarrow{\mathscr{P}}0$ であるとき，$X_n=o_P(1)$ と表し，2 つの確率変数列 $\{X_n\},\{Y_n\}$ が $X_n/Y_n=o_P(1)$ であるときに，$X_n=o_P(Y_n)$ と表す．$X_n=o_P(Y_n)$ であれば $X_n=O_P(Y_n)$ であることが分かる．

Theorem 12. 確率変数列 $\{X_n\}$ が $X_n\xrightarrow{\mathscr{D}}X$ であれば $X_n=O_P(1)$ である．特に，$X_n=o_P(1)$ であれば $X_n=O_P(1)$ である．

Theorem 13. $\{X_n\},\{Y_n\},\{Z_n\}$ を確率変数列とし，$X_n=O_P(1),Y_n=O_P(1),Z_n=o_P(1)$ とする．そのとき，以下が成り立つ．

(i) $X_n+Y_n=O_P(1),X_nY_n=O_P(1)$,

(ii) $X_n+Z_n=O_P(1),X_nZ_n=o_P(1)$.

■参考文献

1) R. J. Serfling :“ Approximation Theorems of Mathematical Statistics, ” Wiley, New York, 2009.
2) 吉田朋広 :“ 数理統計学, ” 朝倉書店, 2006.

■12 群 - 3 編 - 3 章

3-2 極限定理

（執筆者：蛭川潤一）［2014 年 4 月 受領］

本節では，確率収束と概収束に関係する重要な定理である大数の法則と，法則収束に関係する中心極限定理について紹介する．

3-2-1 i.i.d. の場合

（1）大数の法則

大数の法則は，確率変数の和の確率収束と概収束に関係する．

Theorem 14 (大数の弱法則)**.** $\{X_i\}$ は *i.i.d.* な確率変数列で，分布関数 F を持つとする．

$$t\,[1-F(t)+F(-t)] \to 0$$

であるとき，かつそのときに限り，定数列 $\{a_n\}$ が存在して

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a_n \xrightarrow{\mathscr{P}} 0$$

が成り立つ．この場合に $a_n = \int_{-n}^{n} x dF(x)$ と選ぶことができる

この定理のための十分条件は $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x)$ が有限なことであるが，この場合には，より強い次の結果が成り立つ．

Theorem 15 (大数の強法則)**.** $\{X_i\}$ は *i.i.d.* な確率変数列とする．定数 c が存在して，$E(X_1)$ が有限で c と等しいとき，かつそのときに限り

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} c$$

が成り立つ．

（2）中心極限定理

中心極限定理は，確率変数の和の法則収束に関係する．

Theorem 16 (中心極限定理)**.** $\{X_i\}$ は *i.i.d.* な確率変数列で平均 μ と有限な分散 σ^2 を持つとする．そのとき

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} N\left(0,\sigma^2\right)$$

が成り立つ．

この定理は確率ベクトルの場合に拡張される．

Theorem 17. $\{\boldsymbol{X}_i\}$ は *i.i.d.* な確率ベクトル列で平均 $\boldsymbol{\mu}$ と共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を持つとする．そ

のとき

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{\mu}\right)\xrightarrow{\mathscr{D}}N\left(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma}\right)$$

が成り立つ.

3-2-2 非 i.i.d. の場合への拡張

（1）大数の法則の拡張

i.i.d. の仮定を緩めた場合の大数の弱法則と強法則は以下で与えられる.

Theorem 18. $X_1,X_2,\ldots$ は無相関で, 平均 $\mu_1,\mu_2,\ldots$ と分散 $\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ldots$ を持つとする. $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2=o\left(n^2\right)$ であれば

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\xrightarrow{\mathscr{P}}0$$

が成り立つ.

Theorem 19. $X_1,X_2,\ldots$ は独立で，平均 $\mu_1,\mu_2,\ldots$ と分散 $\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ldots$ を持つとする. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma_i^2}{i^2}$ が収束すれば

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\xrightarrow{a.s.}0$$

が成り立つ.

（2）中心極限定理の拡張

i.i.d. の仮定を緩めた場合の中心極限定理は以下で与えられる.

Theorem 20 (Lindeberg-Feller)**.** $\{X_i\}$ は独立な確率変数列で，平均 $\{\mu_i\}$，有限な分散 $\left\{\sigma_i^2\right\}$，分布関数 $\{F_i\}$ を持つとする. $B_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$ は $\frac{\sigma_n^2}{B_n^2}\to 0$, $B_n\to\infty$ を満たすとする．そのとき *Lindeberg* 条件，それぞれの $\varepsilon>0$ に対して

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\int_{|t-\mu_i|>\varepsilon B_n}\left(t-\mu_i\right)^2dF_i\left(t\right)}{B_n^2}\to 0$$

が成り立つとき，かつそのときに限り，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ は $AN\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\frac{1}{n^2}B_n^2\right)$ となる.

Theorem 21. $\{\boldsymbol{X}_i\}$ は独立な確率ベクトル列で，平均 $\boldsymbol{\mu}_i$ と共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_i$，分布関数 $\{\boldsymbol{F}_i\}$ を持つとする. $\frac{\boldsymbol{\Sigma}_1+\cdots+\boldsymbol{\Sigma}_n}{n}\to\boldsymbol{\Sigma}$ が成り立つとし，それぞれの $\varepsilon>0$ に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_i\|>\varepsilon\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_i\|^2d\boldsymbol{F}_i\left(\boldsymbol{x}\right)\to 0$$

が成り立つとする．そのとき，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i$ は $AN\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i,\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}\right)$ となる.

■参考文献

1)　R. J. Serfling：“ Approximation Theorems of Mathematical Statistics, ” Wiley, New York. 2009,

■12 群 - 3 編 - 3 章

3-3 モーメントの収束（一様可積分性）

（執筆者：蛭川潤一）［2014 年 4 月 受領］

前節で紹介した確率変数の収束の内のいずれかの意味で，X_n が X に収束するとして，期待値の収束，すなわち $E\left(X_n^r\right) \to E\left(X^r\right)$ や $E\left|X_n\right|^r \to E\left|X\right|^r$ については何が言えるだろうか．この問いに答えるために一様可積分性という概念を紹介する．確率変数列 $\{X_n\}$ は

$$\lim_{c\to\infty}\sup_n E\left\{\left|X_n\right| I\left(\left|X_n\right|>c\right)\right\}=0$$

を満たすとき，一様可積分であるという．ここに，$I(A)$ は A の定義関数を表す．

(1) 分布収束とモーメントの収束

Theorem 22. $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ であり，確率変数列 $\{X_n^r\}$ $(r>0)$ は一様可積分であると仮定する．そのとき，$E\left|X\right|^r<\infty, E\left(X_n^r\right)\to E\left(X^r\right), E\left|X_n\right|^r \to E\left|X\right|^r$ が成り立つ．

この定理の部分的な逆については，以下が成り立つ．

Theorem 23. $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ であり，$E\left|X_n\right|^r \to E\left|X\right|^r < \infty$ であると仮定する．そのとき，確率変数列 $\{X_n^r\}$ は一様可積分である．

(2) 平均収束とモーメントの収束

上の定理により，平均収束について以下が成り立つ．

Theorem 24. $X_n \xrightarrow{rth} X$ であり，$E\left|X\right|^r<\infty$ であると仮定する．そのとき $E\left(X_n^r\right)\to E\left(X^r\right)$, $E\left|X_n\right|^r \to E\left|X\right|^r$ が成り立つ．

(3) 確率収束とモーメントの収束

確率収束と平均収束ついて，一様可積分性を用いて以下の関係が成り立つ．

Theorem 25. $X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X$ であり，すべての n について，$E\left|X_n\right|^r<\infty$ であると仮定する．そのとき，確率変数列 $\{X_n^r\}$ が一様可積分であるとき，かつそのときに限り，$X_n \xrightarrow{rth} X$ が成り立つ．

確率収束について，以上の結果を組み合わせて，以下の定理のように考えることもできる．

Theorem 26. $X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X$ であり，$E\left|X\right|^r<\infty$ と確率変数列 $\{X_n^r\}$ が一様可積分であることを仮定する．そのとき $E\left(X_n^r\right)\to E\left(X^r\right), E\left|X_n\right|^r \to E\left|X\right|^r$ が成り立つ．

(4) 概収束とモーメントの収束

概収束に関して，以下の定理の様に考えることもできる．

Theorem 27. 確率変数列 $\{X_n^r\}$ が一様可積分であることを仮定する．そのとき，以下が成り立つ．

(i) $E\left(\liminf_{n\to\infty} X_n^r\right) \le \liminf_{n\to\infty} E\left(X_n^r\right) \le \limsup_{n\to\infty} E\left(X_n^r\right) \le E\left(\limsup_{n\to\infty} X_n^r\right)$

(ii) 加えて，$X_n^r \xrightarrow{a.s.} X^r$ であるとき，$E\left|X\right|^r<\infty, E\left(X_n^r\right)\to E\left(X^r\right), E\left|X_n\right|^r \to E\left|X\right|^r$ が成り立つ．

■参考文献

1) R. J. Serfling :“Approximation Theorems of Mathematical Statistics,” Wiley, New York, 2009.
2) A. N. Shiryaev :“Probability,” Springer, New York. 1995.

■12 群 - 3 編 - 3 章

3-4 確率測度の収束と汎関数中心極限定理

（執筆者：蛭川潤一）［2014 年 4 月 受領］

本節では，前節までに紹介した確率変数の収束を拡張した確率測度の収束について述べる．重要な応用例として，中心極限定理の拡張である汎関数中心極限定理について紹介する．

3-4-1 確率測度の収束

Definition 2. S を距離空間，$\mathscr{S}$ を開集合より生成される σ-加法族とし，$\{P_n, n \geq 1\}$ と P を $\mathscr{S}$ 上の確率測度とする．また，S 上の有界で連続な実数値関数の集合を $C(S)$ で表す．もし，すべての $f \in C(S)$ について

$$\int_S f dP_n \to \int_S f dP$$

であれば，P_n は P に弱収束すると言い，$P_n \Rightarrow P$ と表す．

(1) 連続関数の空間上の確率測度

重要な例の一つは，$(S, \mathscr{S}) = (C, \mathscr{C})$ の場合である．ここに，$C = C[0,1]$ は一様距離を持つ $[0,1]$ 上の連続関数の空間である．この一様距離において

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| \to 0$$

のとき $x_n \to x(U)$ と表す．確率要素（つまり，与えられた確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ から S への写像）を扱うときには，対応する測度が上の定義の意味で弱収束するときに，確率要素の列 $\{X_n, n \geq 1\}$ が確率要素 X に分布収束すると言い，$X_n \overset{U}{\Rightarrow} X$ と表す．

Definition 3. S を距離空間とする．確率測度の族 π は，すべての $\varepsilon > 0$ について，コンパクト集合 K が存在して，すべての $P \in \pi$ について，$P\{K\} > 1 - \varepsilon$ を満たすとき，タイト（*tight*）であると言う．

Theorem 28. $\{P_n, n \geq 1\}$ と P を $(C, \mathscr{C})$ 上の確率測度とする．P_n の有限次元分布が P の対応する分布に収束して，$\{P_n, n \geq 1\}$ がタイトであるとき，$P_n \Rightarrow P$ が成り立つ．

(2) 汎関数中心極限定理

上の結果の重要な応用例として，Donsker の定理と呼ばれる汎関数中心極限定理を紹介する．

$\{\zeta_k, k \geq 1\}$ を共通の確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上で定義される i.i.d. 確率変数列とし，$E(\zeta_1) = 0$ と $Var(\zeta_1) = \sigma^2 < \infty$ を仮定する．更に，$S_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k, n \geq 0, (S_0 = 0)$ とおいて

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + \frac{nt - [nt]}{\sigma\sqrt{n}} \zeta_{[nt]+1}(\omega), \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と定義する．ここに，$[\cdot]$ はガウス記号を表す．

Theorem 29 (汎関数中心極限定理)**.** $X_n \overset{U}{\Rightarrow} W$ である．ここに，$W = \{W(t), 0 \leq t \leq 1\}$ は $(C, \mathscr{C})$ 上のウィナー測度である．

■参考文献

1) A. Gut :“ Stopped Random: Walks Limit Theorems and Applications, ” Springer, New York, 2009.