■12 群（電子情報通信基礎）－ 3 編（統計・確率）

6 章 確率過程

（執筆者：井原俊輔）［2009 年 5 月 受領］

■概要■

確率過程は時間とともに変動する偶然現象を記述するための数学モデルである．

確率過程は，確率分布の特徴，あるいは時間の推移に伴う変動，未来での変動の現在の状態及び過去の変動への従属性，といった 2 つの観点から定常過程，マルコフ過程，マルチンゲール，正規過程など種々に分類される．

雑音により妨害を受ける通信のように，ランダムな要因が介在するシステムの理論的解析には確率過程からのアプローチが有効である．また，不確定な変動が予想される現象の将来予測の問題などでも確率過程論に基づく考察が必要である．確率過程の議論は工学のいろいろな分野で応用されている．近年では数理ファイナンスあるいは金融工学の分野でも確率解析の応用が顕著である．

【本章の構成】

本章は，確率過程の一般的性質（6-1 節），定常過程（6-2 節），マルコフ過程（6-3 節），正規過程（6-4 節），確率解析（6-5 節）の 5 節で構成する．6-1 節では確率過程の一般的かつ基本的な性質についてまとめておく．確率過程の種々の分類に対応して，6-2 節では定常過程及び時系列解析，6-3 節ではマルコフ過程，マルチンゲール，レヴィ過程及びポアソン過程について述べる．更に，6-4 節では正規過程について述べ，特にブラウン運動について説明する．最後に，6-5 節で伊藤の確率積分を中心に確率解析及びその応用について述べる．

■12 群 - 3 編 - 6 章

6-1 確率過程の一般的性質

（執筆者：井原俊輔）[2009 年 5 月 受領]

時間とともに変動する偶然現象の数学モデルである確率過程は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された確率変数の族 $\{X(t,\omega); t \in T\}$ として記述される．ここで，T はパラメータの集合で，T が自然数または整数全体のとき離散時間確率過程，T が実数全体 R またはその部分区間（有限または無限）のとき連続時間確率過程という．$X(t,\omega)$ を単に $X(t)$ と書くことも多い．$\omega \in \Omega$ を固定して，$X(t,\omega)$ を t の関数とみたとき，これをを見本過程という．$X(t,\omega)$ の取る値の空間を見本空間あるいは標本空間という．見本空間が実数全体 R の部分集合の場合は実確率過程という．本章では，特に断らないかぎり，実確率過程を単に確率過程と記す．一般には，見本空間としては，複素数空間，多次元空間，位相空間などを考えることもある．

確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ に対し，$E[|X(t)|] < \infty$ のとき $m(t) = E[X(t)]$, $t \in T$, を平均関数という．$E[|X(t)|^2] < \infty$ のとき $R(t,s) = \mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = E[(X(t) - m(t))(X(s) - m(s))]$, $s, t \in T$, を共分散関数という．

確率過程 $\{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ は，ある緩やかな条件のもとで，各時点 $t \in \mathrm{R}$ において右連続かつ左極限を持つとしてよい．確率過程 $\{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ では種々の連続性が考えられる．

各点 t で $P(\{\omega; \lim_{s \to t} X(s,\omega) = X(t,\omega)\}) = 1$ のとき確率 1 で連続という．確率 1 で連続でも，区間 R 全体で確率 1 連続とは言えない．確率 1 で見本過程が連続，すなわち $P(\{\omega; X(t,\omega)$ は t の連続関数 $\}) = 1$ のとき，$\{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ を連続確率過程という．
$\lim_{h \to 0} E[|X(t+h) - X(t)|^p] = 0$ のとき, $t \in \mathrm{R}$ において p 次平均連続という．特に, 2 次平均連続を単に平均連続という．　任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\lim_{h \to 0} P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon) = 0$ のとき，$t \in \mathrm{R}$ において確率連続という．平均連続であれば確率連続である．

確率過程 $\{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ に対し，$[X(t+h) - X(t)]/h \to Y(t)\,(h \to 0)$ が確率収束，平均収束，概収束の意味で成立するとき，それぞれの意味で $X(t)$ は微分可能であるといい，$dX(t)/dt = Y(t)$ と表す．区間 $[a,b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ と $t_i \le \xi_i \le t_{i+1}$ なる任意の ξ_i とに対して, 分割を細かくしていくとき, $\sum_{i=0}^{n-1} X(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$ がある確率変数 Z に確率収束，平均収束，概収束するならば，それぞれの意味で積分可能であるといい，

$$\int_a^b X(t)dt = Z$$

と書く．確率過程 $\{Y(t)\}$ が与えられ, 分割を細かくしていくとき, $\sum_{i=0}^{n-1} X(\xi_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i))$ がある確率変数 Z に確率収束，平均収束，概収束するならば，それぞれの意味でリーマン（Riemann）積分

$$\int_a^b X(t)dY(t) = Z$$

が定義される．

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実確率変数 $Y(t), Z(t)$ を用いて，$X(t) = Y(t) + iZ(t)$ で定義される確率変数 $X(t)$ を複素確率変数という．この場合，確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ を複素確率過程

という．複素確率過程の場合，共分散関数は $R(t,s) = \mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = E[(X(t) - m(t))\overline{(X(s) - m(s))}]$ で定義される．ここで，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

■12 群 - 3 編 - 6 章

6-2 定常過程

（執筆者：井原俊輔）[2009 年 5 月 受領]

6-2-1 2 次過程

複素確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ は，$E[|X(t)|^2] < \infty$ を満たすとき，2 次過程という．2 次過程 $\{X(t); t \in T\}$ に対し，$X(t)$, $t \in T$, の張る線形空間は，内積を $\langle \xi, \eta \rangle = E[\xi\overline{\eta}]$ で定義することにより，ヒルベルト空間となる．$\{X(t); a \leq t \leq b\}$ を平均連続な 2 次過程で $E[X(t)] = 0$ とする．共分散関数 $R(t,s)$ を積分核とする積分作用素の固有値を λ_n，対応する固有関数を $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．

$$\int_a^b R(t,s)\varphi_n(s)ds = \lambda_n \varphi_n(t), \quad a \leq t \leq b,$$

である．$\{\varphi_n(t); n = 1, 2, \cdots\}$ は $L_2[a,b] = \{f; \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$ の正規直交系を成すようにとることができる．このとき，$a \leq t \leq b$ で一様に

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\xi_n \varphi_n(t)$$

が成立する．ここで, 右辺の級数は平均収束する．この展開をカルーネン・レーベ（Karhunen-Loéve）展開という．ただし，ξ_n は

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_a^b X(t)\overline{\varphi_n(t)}dt$$

によって定められる確率変数で，$E[\xi_m \overline{\xi}_n] = \delta_{m,n}$ を満たす．

任意の $s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ に対して増分 $X(s_2) - X(s_1)$ と $X(t_2) - X(t_1)$ が直交するとき，$\{X(t)\}$ を直交過程という．増分の 2 乗平均は $E[|X(t) - X(s)|^2] = \int_{(s,t]} dF(u)$ $(s < t)$ と表現できるが，これを $E[|dX(t)|^2] = dF(t)$ と書くことがある．

6-2-2 定常過程

時間をずらしても（平行移動しても）確率分布が変わらない確率過程を定常過程という．確率過程 $\{X(t); t \in T\}$（T は実数全体または整数全体）は，任意の $x_1, \cdots, x_n$ 及び任意の $t_1, \cdots, t_n, h$ に対し

$$P(X(t_1) \leq x_1, \cdots, X(t_n) \leq x_n) = P(X(t_1 + h) \leq x_1, \cdots, X(t_n + h) \leq x_n)$$

が成立するとき, 強定常過程（狭義定常過程）という．一方, 2 次過程は, 平均 $E[X(t)] = m$ が t によらず一定で，共分散 $R(t,s) = E[(X(t) - m)(X(s) - m)]$ が $t - s$ だけによって定まるとき，弱定常過程（広義定常過程）といい，$\rho(t) = R(t,0)/R(0,0)$ を自己相関関数という．

連続時間弱定常過程 $\{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ の自己相関関数はスペクトル表現

$$\rho(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dF(\lambda),\quad t\in \mathrm{R},$$

を持つ．ここで，$F(\lambda)$ は非減少関数で $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$ を満たし，スペクトル関数といわれる．関数 $F(\lambda)$ が絶対連続の場合，スペクトル表現は

$$\rho(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}f(\lambda)d\lambda$$

となる．このとき，$f(\lambda)=dF(\lambda)/d\lambda$ をスペクトル密度関数または電力スペクトルという．更に，$\{X(t);t\in\mathrm{R}\}$ が平均連続のとき，$X(t)$ 自身が

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dZ(\lambda)$$

とスペクトル表現される．ここで，$\{Z(\lambda)\}$ は $E[|dZ(\lambda)|^2]=\sigma^2dF(\lambda)$ なる直交過程である．ただし，$\sigma^2=R(0,0)$ で $F(\lambda)$ はスペクトル関数.

離散時間弱定常過程 $\{X(t);t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ の場合，自己相関関数のスペクトル表現は次のようになる．

$$\rho(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}dF(\lambda),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

また，定常過程 $\{X(t);t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 自身のスペクトル表現は

$$X(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}dZ(\lambda),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

となる．

一般に，$|\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda|<\infty$ を満たすスペクトル密度関数 $f(\lambda)$ を持つとき，平均が $E[X(t)]=0$ の離散時間弱定常過程 $\{X(t)\}$ は,

$$X(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}b_{n-k}\zeta(k),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

と表現される．これを移動平均表現という．ただし，$\{\zeta(k);k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ は互いに直交する確率変数列で，$E[\zeta(k)]=0$, $E[|\zeta(k)|^2]=1$, $\zeta(k)\in\mathcal{M}_k(X)$ であり，$\zeta(k)$ は $\mathcal{M}_{k-1}(X)$ とは直交する．ここで，$\mathcal{M}_n(X)$ は $\{X(t);t\le n\}$ の張るヒルベルト空間.

平均が $E[X(t)]=0$ の弱定常過程 $\{X(t);t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ は，l 次多項式 $A(z)=\sum_{j=0}^{l}a_{l-j}z^j$ ($a_0=-1$, $a_l\ne0$) と m 次多項式 $B(z)=\sum_{k=0}^{m}b_{m-k}z^k$ ($b_0b_m\ne0$) を使って

$$X(n)=\sum_{j=n-l}^{n-1}a_{n-j}X(j)+\sum_{k=n-m}^{n}b_{n-k}\zeta(k)$$

と表現されるとき，(l,m) 次自己回帰移動平均 (ARMA(l,m)) 過程という．ここで，$\{\zeta(k)\}$ は移動平均表現に現れる確率変数列である．また，この移動平均過程 $\{X(t)\}$ はスペクトル

密度関数

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1}|B(e^{i\lambda})|^2/|A(e^{i\lambda})|^2$$

を持つ．(l, m) 次自己回帰移動平均過程は，特に，$m = 0$ の場合には l 次自己回帰（AR(l)）過程，$l = 0$ の場合には m 次移動平均（MA(m)）過程という．なお，移動平均過程の場合は上の表現で右辺第 1 項はなく $X(n)$ は第 2 項の和のみで表現される．

定常過程 $X = \{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ に対し，時間を s だけずらして得られる確率過程 $T_sX = \{(T_sX)(t); t \in \mathrm{R}\}$ を $(T_sX)(t) = X(t + s)$ により定義する．$E[|f(X)|] < \infty$ を満たす，R^{R} 上で定義された任意の Borel 可測関数 f に対し，確率 1 で極限

$$f^*(X) = \lim_{A,B\to\infty} \frac{1}{A+B} \int_{-A}^{B} f(T_sX)ds$$

が存在し，かつ確率 1 で $f^*(X) = E[f(X)]$ が成り立つとき，定常過程 $X = \{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ はエルゴード性を持つとか，X はエルゴード的であるという．定常過程 $X = \{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ が力学系を表しているとき，エルゴード性は時間平均 $f^*(X)$ と空間平均 $E[f(X)]$ が一致することを意味している．エルゴード的な定常過程 $X = \{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ に対しては，$E[|X(t)|^2] < \infty$ のとき，確率 1 で

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt = E[X(t)],$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)X(t+s)dt = E[X(t)X(t+s)]$$

などが成り立つ．

■12 群 - 3 編 - 6 章

6-3 マルコフ過程

（執筆者：井原俊輔）[2009 年 5 月 受領]

6-3-1 マルコフ過程

確率過程 $\{X(t); t \in T\}$（$T = [0, \infty)$ または $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$）は，任意の $t_1 < \cdots < t_n < t$ に対し，$X(t_1), \cdots, X(t_n)$ の取る値が与えられたときの $X(t)$ の条件付確率が $X(t_n)$ の値のみに依存するとき，すなわち任意の実数 $x_1, \cdots, x_n, x$ に対して，

$$P(X(t) \leq x | X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_n) = x_n) = P(X(t) \leq x | X(t_n) = x_n)$$

が成り立つとき，マルコフ（Markov）過程という．マルコフ過程 $\{X(t); t \in T\}$ は，$X(t)$ が可算集合の値をとるときは，マルコフ連鎖ともいう．

マルコフ過程に対し，

$$F(s, x_0, t, A) = P(X(t) \in A | X(s) = x_0) \quad (s < t)$$

を推移確率といい，$F(s, x_0, t, A) = \int_A f(s, x_0, t, x)dx$ のとき $f(s, x_0, t, x)$ を推移確率密度関数という．マルコフ過程の確率分布は，

$$\begin{aligned} & P(X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in A_2, \cdots, X(t_n) \in A_n) \\ & = \int_{A_n} \cdots \int_{A_2} \int_{A_1} f(t_1, x_1) f(t_1, x_1, t_2, x_2) \\ & \qquad \qquad \cdots f(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

により計算される．ただし，$P(X(t) \in A) = \int_A f(t, x)dx$．推移確率はチャップマン・コルモゴロフ（Chapman-Kolmogorov）の方程式

$$f(s, x_0, t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, x_0, u, y) f(u, y, t, x) dy \quad (s < u < t)$$

を満たす．可算集合 $\{1, 2, \cdots\}$ に値をとるマルコフ連鎖では, 推移確率 $F_{ij}(s, t) = P(X(t) = j | X(s) = i)$ $(s < t)$ を要素とする行列 $F(s, t) = [F_{ij}(s, t)]_{ij}$ を推移確率行列という．コロモゴロフ・チャップマンの方程式は $F(s, t) = F(s, u)F(u, t)$ $(s < u < t)$，すなわち

$$F_{ij}(s, t) = \sum_k F_{ik}(s, u) F_{kj}(u, t)$$

となる．

マルコフ過程 $\{X(t); t \geq 0\}$ は，任意の s, t $(s < t)$ と任意の x_0 及び A について，

$$F(s, x_0, s + t, A) = P(X(t) \in A | X(0) = x_0)$$

が成立するとき，時間的に一様なマルコフ過程と呼ぶ．この場合，推移確率は $G(t, x_0, A) = F(s, x_0, s + t, A)$ と書ける．時間的に一様なマルコフ連鎖では，推移確率行列 $F(s, s + t)$

は t のみに依存する．

確率過程 $\{X(t); t \geq 0\}$ は，(1) 独立増分過程，すなわち任意の $s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ に対して増分 $X(s_2) - X(s_1)$ と $X(t_2) - X(t_1)$ が独立，(2) 時間的に一様，(3) 見本過程が確率１で右連続かつ左極限を持つ，(4) $X(0) = 0$，を満たすとき，レヴィ（Lévy）過程という．レヴィ過程は加法過程とも呼ばれていた．レヴィ過程 $\{X(t)\}$ は，任意の正数 a に対し正数 b と実数 c が存在して確率過程 $\{X(at)\}$ と $\{bX(t) + c\}$ が同じ分布に従うとき，安定過程という．特に，$c = 0$ ととれる場合は狭義の安定過程という．

6-3-2 マルチンゲール

確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ と $\mathcal{F}$ の部分完全加法族の集合 $\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$ とが与えられ，(1) $s < t$ のとき $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$，(2) $X(t)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測，(3) 確率１で $E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$ $(s < t)$，を満たすとき，$\{X(t); t \in T\}$ を $\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$ に関するマルチンゲールという．条件 (3) において，等式ではなく，$E[X(t)|\mathcal{F}_s] \leq X(s)$ が成り立つ場合は優マルチンゲール，$E[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s)$ が成り立つ場合は劣マルチンゲールという．マルチンゲールは公平な賭の数学モデルとなっている．

6-3-3 ポアソン過程

確率過程 $\{X(t); t \geq 0\}$ は以下の４条件を満たすとき密度 $\lambda > 0$ のポアソン（Poisson）過程という．(1) $X(0) = 0$, (2) $X(t)$ は高さ１の飛躍だけで増加, (3) $\{X(t)\}$ はレヴィ過程, したがって任意の増大列 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に対して $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ は独立，(4) 増分 $X(t) - X(s)$ $(s < t)$ はパラメータ $\lambda(t - s)$ のポアソン分布に従う．すなわち $P(X(t) - X(s) = k) = e^{-\lambda(t-s)}\{\lambda(t - s)\}^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

ポアソン過程 $\{X(t)\}$ は微分可能ではないが，形式的に $dX(t) = \dot{X}(t)dt$ と書く．ポアソン過程の飛躍点を $\{\tau_i; i = 1, 2, \cdots\}$ とするとき

$$\dot{X}(t) = \sum_i \delta(t - \tau_i)$$

と書ける．このような $\dot{X}(t)$ をショット雑音という．$\{\dot{X}(t)\}$ の平均は $E[\dot{X}(t)] = \lambda$ で，共分散関数は $R(t, s) = \lambda\delta(t - s)$ である．このように，ポアソン過程を形式的に微分して与えられる $\{\dot{X}(t)\}$ は白色ショット雑音を表す．

■12 群 - 3 編 - 6 章

6-4 正規過程

（執筆者：井原俊輔）[2009 年 5 月 受領]

6-4-1 正規過程

確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ は, 任意の $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ に対して $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ の分布が正規分布に従うとき，正規過程あるいはガウス過程という．正規過程の分布は平均関数 $m(t) = E[X(t)]$ と共分散関数 $R(t, s) = \mathrm{Cov}(X(t), X(s))$ によって決定する．正規過程では強定常性と弱定常性は同等である．

6-4-2 ブラウン運動（ウィーナー過程）

正規過程 $\{B(t); t \geq 0\}$ は，$E[B(t)] = 0$, $\mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = \min(t, s)$ のとき，ブラウン運動という．ウィーナー（Wiener）過程と呼ばれることもある．$0 \leq s < t$ のとき，$B(t) - B(s)$ は正規分布 $N(0, t - s)$ に従う．$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ のとき，$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ は互いに独立であり，ブラウン運動はレヴィ過程であり，マルコフ過程でもある．ブラウン運動 $\{B(t); t \geq 0\}$ は，$\mathcal{B}_t$ を $\{B(s); s \leq t\}$ を可測にする最小の完全加法族とするとき，$\{\mathcal{B}_t; t \geq 0\}$ に関するマルチンゲールである．

ブラウン運動の見本過程は有限区間で確率 1 で一様連続であるが，確率 1 で至るところ微分不可能であり，有界変動にもならない．

ブラウン運動 $\{B(t)\}$ を形式的に微分して得られる確率過程 $\{\dot{B}(t)\}$ は平均が $E[\dot{B}(t)] = 0$, 共分散が $E[[\dot{B}(t)\dot{B}(s)] = \delta(t - s)$ の正規定常過程であり，スペクトル密度関数は $f(\lambda) \equiv 1$ である．確率過程 $\{\dot{B}(t)\}$ を白色ガウス雑音という．$\{\dot{B}(t)\}$ は，各時点ごとに独立で，各 $\dot{B}(t)$ は正規分布に従う雑音の数学モデルである．ただし，実用的には有限の周波数帯域でスペクトル密度関数が一定の帯域制限白色雑音が使われる．

正規過程 $\{X(t); t \in \mathrm{R}\}$ は，平均が $E[X(t)] = 0$，共分散が $E[X(t)X(s)] = \exp^{-|t-s|}$ のとき，オルンシュタイン・ウーレンベック（Ornstein-Uhlenbeck）過程（OU 過程）という．オルンシュタイン・ウーレンベック過程は定常過程でもあり，マルコフ過程でもある．

■12 群 - 3 編 - 6 章

6-5 確率解析

（執筆者：井原俊輔）[2009 年 5 月 受領]

6-5-1 確率積分

ブラウン運動 $\{B(t); t \geq 0\}$ と可測関数 $f(t,\omega)$ を考える．$\mathcal{B}_t$ を $\{B(s); s \leq t\}$ を可測にする最小の完全加法族とする．$\{\mathcal{A}_t; t \geq 0\}$ は t とともに増大する完全加法族の集合で，$\mathcal{B}_t \subset \mathcal{A}_t$ かつ $\mathcal{A}_t$ 可測な確率変数は $B(t+h) - B(t)$ $(h > 0)$ と独立とする．関数 $f(t,\omega)$ は，(1) 各 t に対して $f(t,\cdot)$ は $\mathcal{A}_t$ 可測，(2) 確率 1 で $\int_0^a |f(t,\omega)|^2 dt < \infty$，を満たすものとする．このとき，確率積分（伊藤確率積分）

$$\int_0^a f(t,\omega) dB(t,\omega)$$

が定義できる．確率積分は $\int_0^a f(t)dB(t)$ と書くことも多い．特に，$f(t,\omega)$ が階段過程の場合，すなわち，区間 $[0,a]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = a$ と $\mathcal{A}_{t_i}$ 可測な確率変数 ξ_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ があって $f(t,\omega) = \xi_{i-1}(\omega)$, $t_{i-1} \leq t < t_i$, の場合，

$$\int_0^a f(t)dB(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))$$

である．確率積分については，$E[\int_0^a f(t)dB(t)] = 0$ 及び

$$E\left[\int_0^a f(t)dB(t) \int_0^b g(t)dB(t)\right] = \int_0^{a\wedge b} f(t)g(t)dt$$

$(a \wedge b = \min(a,b))$ が成り立つ．

$$I(t;f) = \int_0^t f(s)dB(s)$$

とおくと，確率過程 $\{I(t;f); t \geq 0\}$ は $\{\mathcal{B}_t; t \geq 0\}$ に関するマルチンゲールである．

非積分関数 $g(t)$ が確率過程ではなく，$\|g\|^2 = \int_0^a |g(t)|^2 dt < \infty$ なる可測関数の場合には，確率積分 $I(g) = \int_0^a g(t)dB(t)$ をウィーナー（Wiener）積分という．このとき，$I(g)$ は正規分布 $N(0, \|g\|^2)$ に従う．

ブラウン運動 $\{B(t); t \geq 0\}$ の代わりにマルチンゲール $\{X(t); t \geq 0\}$ による確率積分 $\int_0^a f(t)dX(t)$ も定義される．

確率過程 $\{X(t)\}$ に対し，

$$X(t,\omega) - X(s,\omega) = \int_s^t \alpha(u,\omega)du + \int_s^t \beta(u,\omega)dB(u)$$

が成り立っているとき，この関係式を

$$dX(t) = \alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dB(t)$$

と表し，$dX(t)$ を $X(t)$ の確率微分という．

R^n で定義された関数 $\psi = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が各 x_i につき 2 回連続微分可能とし，$\partial\psi/\partial x_i = \psi_i$, $\partial^2\psi/\partial x_i \partial x_j = \psi_{ij}$ とおく．このとき，確率過程

$$Y(t) = \psi(X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)),$$
$$dX_i(t) = \alpha_i(t,\omega)dt + \beta_i(t,\omega)dB(t), \quad i = 1, \cdots, n,$$

に対し，

$$Y(t) - Y(0) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \psi_i(Y(s))dX_i(s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(Y(s))\beta_i(s)\beta_j(s)ds$$

が成り立つ．これを伊藤の公式という．確率微分で表せば

$$dY(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \psi_{ij}\beta_i\beta_j dt$$

となる．一例として, 数理ファイナンスにおける, 株価過程をあげておく．株価過程 $\{S(t); t \geq 0\}$ は，ブラウン運動 $\{B(t)\}$ を使って，

$$S(t) = S(0)\exp\{\sigma B(t) + \gamma t\}, \quad t \geq 0,$$

で定義される．ここで，σ と γ は定数である．伊藤の公式を適用して得られる

$$dS(t) = \sigma S(t)dB(t) + \left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)dt$$

が株価過程の満たす確率微分方程式である．

確率方程式

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(u, X(u))du + \int_0^t \beta(u, X(u))dB(u)$$

を考える．この式は

$$\begin{cases} dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \beta(t, X(t))dB(t), \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

とも書かれ，これをマルコフ型確率微分方程式という．$\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ が x についてリプシッツ（Lipschitz）条件を満たせば，解 $\{X(t)\}$ が一意的に存在し，見本過程は連続である．また，$\{X(t)\}$ はマルコフ過程である．関数 $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ が t によらない場合，すなわち $\alpha(t,x) = \alpha(x)$, $\beta(t,x) = \beta(x)$ の場合，上の方程式を時間的に一様なマルコフ型確率微分方程式という．その解 $\{X(t)\}$ は時間的に一様なマルコフ過程である．

時間的に一様な場合，この確率微分方程式の解 $\{X(t)\}$ の推移確率密度関数を $f(t,x,y)$ とし，有界集合の外では 0 となる連続関数 h に対し，$F(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x,y)h(y)dy$ と定める．このとき，$F(t,x)$ は次の発展方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}F(t,x) = \alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}F(t,x) + \frac{1}{2}\beta(x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(t,x), \\ F(0,x) = h(x) \end{cases}$$

の初期値問題の解となる．この式はフォッカー・プランク（Fokker-Planck）の方程式ともいわれる．

■参考文献

1)　伊藤　清：“確率論,” 岩波書店，1953.
2)　国田　寛：“確率過程の推定,” 産業図書，1976.
3)　西尾眞喜子，樋口　保：“確率過程入門,” 培風館，2006.
4)　B. Oksendal （谷口説男，訳）：“確率微分方程式―入門から応用まで―,” シュプリンガー，1999.