■12 群（電子情報通信基礎）－ 4 編（力学・電磁気学）

2 章　質点系と剛体

（執筆者：伊東敏雄）[2015 年 6 月 受領]

■概要■

多数の質点の集まりを質点系という．本章では，まず質点系の運動に関して一般的に成り立つ関係式を導く．

剛体とは有限の広がりを持った，力を加えても変形しない理想化した連続体である．相互間の位置関係が不変に保たれる質点系として扱うことができ，質点系に対して一般的に導いた関係式はそのまま成り立つ．剛体の運動は並進運動と回転運動に分けて考えることができる．並進運動は質点の運動として扱えるのに対して，回転運動は剛体に特徴的な運動である．

【本章の構成】

本章では最初に，相互作用している 2 個の質点の運動を扱う．2 個の質点の運動は 1 個の質点の運動に帰着できる（2-1 節）．質点系を扱うときには，力を質点系内の質点の相互間に作用する力，内力と，質点が質点系の外から受ける力，外力とに分ける．質点系の質量中心の運動は質点系に作用する外力だけで決まる（2-2 節）．更に，質点系の全運動量及び全角運動量の時間変化は外力だけで決まること，外力の総和が 0 ならば運動量保存則が，外力のモーメントの総和が 0 ならば角運動量保存則が成り立つことを導く（2-3 節）．質点系の全運動エネルギーについても考察する（2-4 節）．運動量保存則を応用する例として衝突問題を扱う（2-5 節）．

後半では剛体の運動方程式を与え，剛体に作用する力について調べ，剛体の釣り合いの条件を求める（2-6 節）．回転運動は剛体に特有な運動である．最も簡単な例として，固定軸周りの剛体の回転運動を調べる（2-7 節）．いくつかの剛体について，回転運動の解析に必要な慣性モーメントを計算する（2-8 節）．具体的な例として実体振り子を取り上げる（2-9 節）．最後に剛体の平面運動を扱う（2-10 節）．

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-1 2 体問題

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

2 つの質点が相互に力を及ぼし合って運動する力学の問題を 2 体問題という．2 体問題は 1 個の質点の問題に帰着できる．

2-1-1 2 体問題

相互作用している 2 つの質点を考える．各質量を m_1，m_2，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，質点 1 が 2 に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{12}$，質点 2 が 1 に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{21}$ とすると（**図 2･1** 参照），運動方程式は

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_{21}, \quad m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_{12} \tag{2･1}$$

である．ここで，$\boldsymbol{F}_{12}$ と $\boldsymbol{F}_{21}$ の間には，作用・反作用の法則により，次の関係がある．

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{2･2}$$

2 つの質点の質量の和を M とする．

$$M = m_1 + m_2 \tag{2･3}$$

2 つの質点の質量中心（重心）の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ を次の式で定義する．

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{M} \tag{2･4}$$

運動方程式 (2･1) の各辺を足し合わせて，式 (2･2)，式 (2･4) に注意すると次式を得る．

$$M \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{2･5}$$

質量中心は静止，または等速直線運動をしていることが分かる．次に，質点 1 から見た質点 2 の相対的な位置ベクトル

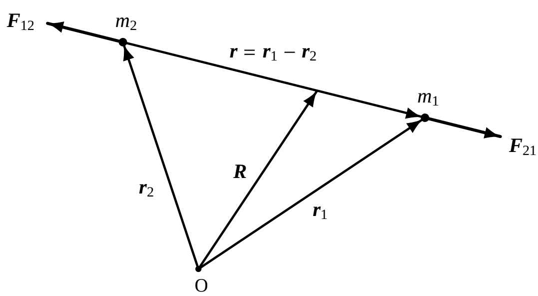


図 2･1　2 体問題．図の力は反発力の場合．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{2・6}$$

を定義すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\boldsymbol{F}_{12} \tag{2・7}$$

が得られる．ここで，換算質量と呼ばれる次の量 μ を定義する．

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{2・8}$$

換算質量を使うと式 (2・7) は次式となる．

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_{12} \tag{2・9}$$

すなわち，質点 1 から見た質点 2 の相対運動は，質点 2 の質量を換算質量 μ に置き換えて 1 個の質点の運動として扱うことができる．各質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{r}$ で表しておこう．

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r} \tag{2・10}$$

2-1-2 惑星の運動

前章の**??**項においては，太陽は座標原点に静止していると仮定したが，太陽と惑星を 2 体問題として扱ってみよう．太陽の質量を M，惑星の質量を m として，太陽から見た惑星の相対的な位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると式 (2・9) と式 (2・8) を用いて次式を得る．

$$\frac{Mm}{M+m}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2・11}$$

ここで，G は万有引力定数である．上式を整理して

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{M+m}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2・12}$$

を得る．太陽を固定して考えた場合との違いは GM が $G(M+m) = GM(1+m/M)$ に置き換えられたことである．惑星と太陽の質量比 m/M は地球の場合には 3×10^{-6} であり，極めて僅かである．太陽系で最も大きな質量を持つ木星の場合には $m/M \approx 1\times10^{-3}$ であるので，太陽-木星の質量中心は太陽-木星間の距離（約 7×10^8 km）を 1:1000 に内分する点であり，太陽と木星はこの質量中心の周りに運動している*.

* 太陽と木星の質量中心の軌道半径 7×10^5 km はほぼ太陽の半径に等しいので，太陽-木星の質量中心はほぼ太陽の表面付近にあることになる．

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-2 質量中心とその運動

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

お互いの間の相互作用が無視できない多数の質点からなる質点系の一般論を展開する．

2-2-1 質点系の質量中心

多数の質点からなる質点系を考えよう．質点系内の質点に作用する力は内力と外力に二分される．内力は質点系内の他の質点から受ける力，外力は質点系外の物体から受ける力である．質点系の i 番目の質点の質量を m_i，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$，i 番目の質点が j 番目の質点から受ける力（内力）を $\boldsymbol{F}_{ji}$，質点系の外部から受ける力（外力）を $\boldsymbol{F}_i$ とすると，個々の質点の運動方程式は次のように書ける．

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \tag{2・13}$$

すべての質点について，その運動方程式を辺々加え合わせて次式を得る．

$$\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \tag{2・14}$$

内力については作用・反作用の法則により

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij} \tag{2・15}$$

の関係があるので，式 (2･14) の右辺第 2 項（内力の総和）は 0 となる．

$$\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{2・16}$$

ここで，質点系の全質量を M とする．

$$M = \sum_i m_i \tag{2・17}$$

質点系の質量中心の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ を次の式で定義する．

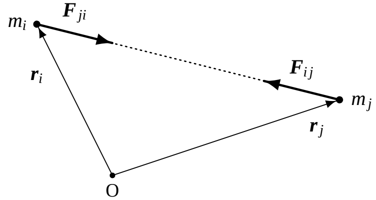


図 2･2　質点系の内力（図は引力の場合）

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \tag{2・18}$$

一様な重力場において大きさのある物体が受ける重力の中心（重心）は質量中心に一致するので（2–6–2 項参照），質量中心を重心と呼ぶことも多い．本章では，質点系では “質量中心”，剛体では “重心” を使うが，同義と考えて差し支えない．全質量 M と質量中心の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ を使うと，式 (2・16) は

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{2・19}$$

すなわち，質点系の質量中心の運動は，系の全質量に等しい質量を持ち，質量中心に位置する質点に，すべての外力が集中的に作用する場合の運動と全く同じである．大きさのある物体も多くの質点からなる質点系と考えることができる．したがって，物体の重心（質量中心）を追跡する限り，その運動は 1 個の質点の運動として記述することができる．

2-2-2 慣　性

もし質点系に外力が働いてないならば，または外力の総和が 0 であるならば式 (2・19) は

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \text{一定} \tag{2・20}$$

を与える．つまり，質点系の質量中心の加速度は 0 であり，質量中心は静止の状態か等速直線運動を続ける．物体の慣性とは，物体の質量中心（重心）が持つこのような特性のことである．

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-3 質点系の運動量と角運動量

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

質点系の全運動量と全角運動量について考察し，運動量と角運動量の保存則について解説する．

2-3-1 質点系の運動量

質点系の全運動量を $\boldsymbol{P}$ とする．

$$\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \tag{2・21}$$

質点系の質量中心 $\boldsymbol{R}$ の定義式 (2･18) より

$$\boldsymbol{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i\Big) = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = M\boldsymbol{V} \tag{2・22}$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{V}$ は質量中心の速度である．すなわち，質点系の全運動量を考えるときは，質量中心の速度のみに注目すればよい．全運動量 $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}$ を使うと，質量中心の運動を記述する式 (2･19) は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{2・23}$$

と表される．全運動量の時間変化は外力だけで決定される．もし質点系に外力が作用しないならば，あるいは外力の総和が 0 であるならば，全運動量は一定に保たれる．これを運動量保存則という．

2-3-2 質点系の角運動量

質点系の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，個々の質点の角運動量 $\boldsymbol{l}_i$ の総和である．

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \tag{2・24}$$

全角運動量の時間変化を調べよう．前章**??**項の式 (**??**) によれば，質点の角運動量の時間変化は質点に作用する力のモーメントに等しい．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_i \times \Big(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji}\Big) \tag{2・25}$$

すべての質点について加え合わせて次式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} \tag{2・26}$$

ここで，内力のモーメントの総和を次のように書き換える．

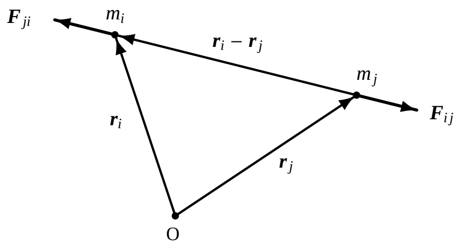


図 2･3　2 つの質点を結ぶ直線に平行な内力（図は反発力の場合）

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_i \sum_{j>i} \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ij} \right) = \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ji} \tag{2･27}$$

2 つの質点の間に作用する内力が 2 つの質点を結ぶ直線に平行な場合を考えると，$\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ と $\boldsymbol{F}_{ji}$ は平行または反平行であるので，ベクトル積は 0 であるから（**図 2･3** 参照），内力のモーメントの総和は 0 である．したがって，質点系の全角運動量の時間変化は外力のモーメントだけによって決められる．すなわち，次式を得る*.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{2･28}$$

質点系の全角運動量の時間変化は外力のモーメントによって決められるので，外力が作用しなければ，あるいは外力が作用しても外力のモーメント（の総和）が 0 であるならば，全角運動量は一定に保たれる．これを角運動量の保存則という．

2-3-3 質量中心の周りの角運動量

質点の位置ベクトルと速度を

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i', \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i' \tag{2･29}$$

と表そう．$\boldsymbol{r}_i'$ は質量中心に相対的な位置ベクトル，$\boldsymbol{v}_i'$ は質量中心に相対的な速度である．質点系の全角運動量の式 (2･24) に式 (2･29) を代入して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_i m_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i') \times (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i') \\ &= M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times \left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' \right) + \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i' \end{aligned} \tag{2･30}$$

ここで，$\boldsymbol{r}_i'$ は質量中心から見た位置ベクトルであるから，質量中心の定義により

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' = 0, \quad \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = 0 \tag{2･31}$$

* 2 つの質点間の内力が質点を結ぶ直線に平行でない場合には $\boldsymbol{F}_{ji}$ と $\boldsymbol{F}_{ij}$ のモーメントの和は 0 ではないが，この場合にも内力のモーメントの総和が 0 であることは成り立つ.

である．したがって，次の関係式が得られる．

$$\boldsymbol{L} = M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V} + \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i{}' \times \boldsymbol{v}_i{}' \equiv \boldsymbol{L}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{L}' \tag{2・32}$$

ここで

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}} \equiv M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V} \tag{2・33}$$

は質量中心の運動に伴う原点の周りの角運動量

$$\boldsymbol{L}' \equiv \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i{}' \times \boldsymbol{v}_i{}' \tag{2・34}$$

は，質点系の質量中心の周りの角運動量である．

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}$ と $\boldsymbol{L}'$ の時間微分を求めておこう．まず，$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}$ の時間微分をとると

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{V} + M\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = M\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} + \boldsymbol{R}\times\left(M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2・35}$$

ここで，$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} = 0$ および式 (2・23) の関係を使って次の式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{R}\times\sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{2・36}$$

この式の導出から分かるように，この式は全運動量の時間変化の式 (2・23) の書き換えである．次に，2 つの式 (2・28)，(2・36) の辺々を引き算して

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{R}\times\sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R})\times\boldsymbol{F}_i \tag{2・37}$$

$\boldsymbol{L}'$ の時間変化に関する次の関係が導かれる．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i{}'\times\boldsymbol{F}_i \tag{2・38}$$

この式は，質量中心の運動に関係なく成り立つことに注意しよう．

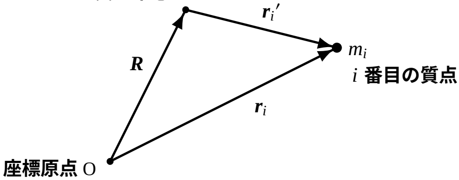


図 2・4　質量中心 G に相対的な位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i{}'$

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-4 質点系の運動エネルギー

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

質点系の持つ全運動エネルギーについて考察する．

2-4-1 質点系の運動エネルギー

質点系の全運動エネルギーを T としよう．質量中心の速度を $\boldsymbol{V}$，質量中心に相対的な質点の速度を $\boldsymbol{v}_i'$ とすると，$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i'$ の関係により

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i{}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i')^2 \\ &= \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i'\right)\boldsymbol{V} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i'^2 \end{aligned} \tag{2・39}$$

となる．ここで，$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$ であるから次の関係が得られる．

$$T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i'^2 \tag{2・40}$$

この式の右辺の第 1 項は，質量中心の運動（系の全体としての運動）の運動エネルギー，第 2 項は質量中心に相対的な運動（系の内部運動）の運動エネルギーと解釈できる．

2-4-2 内部エネルギー

巨視的な物体は，膨大な数の原子，分子の集まりであり，その意味では質点系である．しかし，巨視的物体の運動エネルギーとは，質量中心の運動（重心運動あるいは並進運動）の運動エネルギーを意味する．質量中心に対する質点（原子，分子）の相対的な運動は，質量中心の周りの全体としての回転運動を除いて，力学の対象とはしない．力学の対象とならない原子，分子の内部運動の運動エネルギーは “内部エネルギー” に属する．“内部エネルギー” には原子間や分子間の相互作用の位置エネルギーも含まれ，熱エネルギーに分類される．力学的エネルギーの一部が内部エネルギーに移行したとき，力学的エネルギーは “失われた” とみなされる．

2-4-3 2 質点系の運動エネルギー

質点系の運動エネルギーの式 (2・40) を 2 質点の場合に適用してみよう．質点の質量を m_1，m_2，速度を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ とする．質量中心の速度を $\boldsymbol{V}$ とすると，質量中心に相対的な速度は $\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}$ であるから，全運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \left\{\frac{1}{2} m_1 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V})^2\right\} \tag{2・41}$$

となる．ただし，$M = m_1 + m_2$ である．質量中心の速度は

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{2・42}$$

と表される．これを使うと質量中心に相対的な運動エネルギーの和は

$$\frac{1}{2}m_1(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{V})^2+\frac{1}{2}m_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{V})^2 = \frac{1}{2}m_1\left\{\frac{m_2(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)}{m_1+m_2}\right\}^2+\frac{1}{2}m_2\left\{\frac{m_1(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}{m_1+m_2}\right\}^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)^2 = \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)^2 \qquad (2\cdot43)$$

と表され，2 つの質点の相対運動の運動エネルギーに等しい．ただし，μ は式 (2･8) で与えられる換算質量である．結局，2 つの質点の全運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2+\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)^2 \qquad (2\cdot44)$$

と表される．右辺の第 1 項が質量中心の運動の運動エネルギー，第 2 項が相対的な運動の運動エネルギーである．

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-5 運動量保存則と衝突

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

衝突とは，2 つの物体の間に，短時間の間に大きな力（撃力）が作用して物体の運動状態が急激に変化する現象である．外力が作用してないか，外力の総和が 0 であるならば，全運動量は一定であるから，運動量保存則を用いて解析することができる．しかし，外力が作用している場合でも，衝突時間の間の外力の力積が，物体間に働く撃力の力積に比べて十分に小さければ，外力は無視でき，運動量保存則を適用して問題を扱うことができる．

2-5-1 1 次元の衝突

直線上を運動している 2 つの粒子（質点とみなす）が衝突し，衝突後も同じ直線上を運動する場合を考えよう．2 つの粒子の質量を m_1，m_2，衝突前の速度を v_1，v_2，衝突後の速度を $v_1{}'$，$v_2{}'$ とする．外力を考えなければ運動量保存則が成り立つので次の関係式が成り立つ．

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}' \tag{2・45}$$

また，経験則によれば，衝突前後の相対速度の比は一定である．

$$\frac{v_1{}' - v_2{}'}{v_1 - v_2} = -e \tag{2・46}$$

この正の定数 e を跳ね返り係数または反発係数といい，粒子の材質に依存する．全運動量は一定であるから，質量中心の速度 V は衝突の前後で変わらない．

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}'}{m_1 + m_2} \tag{2・47}$$

式 (2・46)，式 (2・47) から衝突後の速度を求めることができる．

$$v_1{}' = V - e\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{2・48}$$

$$v_2{}' = V + e\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{2・49}$$

衝突前後における全運動エネルギーの変化を調べてみよう．質量中心の運動の運動エネルギーは衝突の前後で変わらないので，相対運動の運動エネルギーの変化を調べればよい．

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta} T \equiv T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}\mu(v_1{}' - v_2{}')^2 - \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu e^2(v_1 - v_2)^2 - \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)(v_1 - v_2)^2 \end{aligned} \tag{2・50}$$

図 2・5　1 次元の衝突

衝突の際に別の形態のエネルギーが運動エネルギーに移行することがない限り，運動エネルギーが増加することはないから $\Delta T \leq 0$ である．すなわち，$0 \leq e \leq 1$ である．$e = 1$ の場合には衝突の前後で運動エネルギーの和は一定に保たれる．このような衝突を弾性衝突という．$e < 1$ の場合には非弾性衝突，$e = 0$ の場合は完全非弾性衝突という．完全非弾性衝突においては，相対運動の運動エネルギーはすべて失われ，2 つの粒子は衝突後は合体して運動する．非弾性衝突において失われた運動エネルギーは内部エネルギーに転化した．

2-5-2 2 次元の衝突

一般には衝突前後の質点の運動は平面内で行われる．問題を簡単にするために，第 2 の粒子とともに運動する座標系で衝突を観測しよう．**図 2･6** のように x 軸正方向に速度 $\boldsymbol{v}_1$ で入射した粒子（質量 m_1）が静止している粒子（質量 m_2）に衝突し，入射粒子は x 軸と角度 θ_1 の方向へ速度 $\boldsymbol{v}_1'$ で，静止していた粒子は反対側の角度 θ_2 の方向へ速度 $\boldsymbol{v}_2'$ で運動を始めたとしよう．

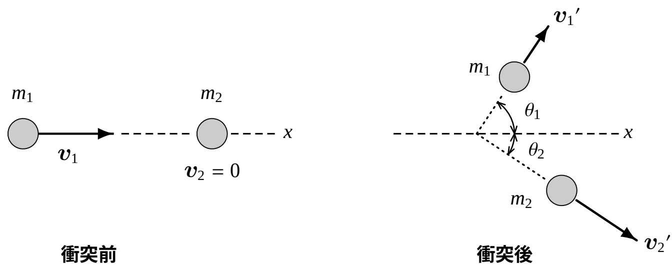


図 2･6　2 次元の衝突

運動量保存則をベクトルの形式で表すと

$$m_1\boldsymbol{v}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' \tag{2･51}$$

である．x 成分と y 成分に分けて表すと次式となる．

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\theta_1 + m_2 v_2' \cos\theta_2 \tag{2･52}$$

$$0 = m_1 v_1' \sin\theta_1 - m_2 v_2' \sin\theta_2 \tag{2･53}$$

全運動エネルギーは保存されるとは限らないが，保存される場合（弾性衝突の場合）には次の関係が成り立つ．

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1}'^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}'^2 \tag{2･54}$$

衝突後の運動を完全に決定するには，衝突の際に粒子間に作用する内力に関する情報が必要である．通常は，内力を問題とする代わりに，衝突後の粒子の運動方向 θ_1 または θ_2 を既知として衝突現象を扱うことが多い．

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-6 剛体とその釣り合い

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

有限の広がりを持つ物体の運動を扱う．力学では，力を加えても変形しない物体を考える．このような理想化された物体を剛体という．

2-6-1 剛体の運動方程式

剛体の最も簡単な運動は平行移動と，ある軸の周りの回転である．平行移動は並進運動ともいい，剛体のすべての点が同じ速度ベクトルを持つ運動である．一方，回転運動は剛体のすべての点が同じ角速度ベクトルを持つ運動である．剛体の一般的な運動は，並進運動と回転運動の組合せである．並進運動と回転運動はそれぞれ自由度 3 を持つので，剛体の運動の自由度は 6 である．したがって，剛体の運動は，質点系において導いた全運動量の式と全角運動量の式によって完全に記述される．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{2・55}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \quad \text{または} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i{}' \times \boldsymbol{F}_i \tag{2・56}$$

ただし，$\boldsymbol{F}_i$ は剛体に作用する力（外力），$\boldsymbol{r}_i$ は力の作用点の位置ベクトルである．第 1 式は剛体の質量中心（重心）の運動（並進運動）を記述する．剛体の質量を M，質量中心の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$ とすると

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{2・57}$$

と書くことができ，剛体の重心の運動は質点の運動として扱うことができる．第 2 式の $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ の式は座標原点の周りの回転を，$\mathrm{d}\boldsymbol{L}'/\mathrm{d}t$ の式は質量中心の周りの回転を記述する．どちらの式を使ってもよく，問題を扱うのに便利な方を選ぶ．

2-6-2 剛体に作用する力

剛体に多くの外力が作用する場合に，剛体の運動は作用する外力の総和と外力のモーメントの総和によって決定される．もし外力の総和に等しい一つの力のモーメントが外力のモーメントの総和に等しいならば，剛体に作用する多くの外力はこの一つの力で置き換えることができる．

(1) 剛体に作用する重力

重力は剛体の各部分に作用している．剛体を微小部分に分け，i 番目微小部分の質量を m_i，重力加速度ベクトルを $\boldsymbol{g}$ と記すと，重力の総和は

$$\sum_i m_i \boldsymbol{g} = M\boldsymbol{g} \tag{2・58}$$

である．重力のモーメントの総和は，i 番目微小部分の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ を質量中心の位置ベ

クトル $\boldsymbol{R}$ と質量中心に相対的な位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i'$ に分けて計算すると

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{g} = \sum_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i') \times m_i \boldsymbol{g}$$
$$= \boldsymbol{R} \times \left(\sum_i m_i\right)\boldsymbol{g} + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'\right) \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{R} \times (M\boldsymbol{g}) \qquad (2\cdot 59)$$

となる（式 (2･31) 参照）．すなわち，剛体の各部分に作用する重力は，質量中心に全重力 $M\boldsymbol{g}$ が作用すると考えてよい．これゆえに剛体の質量中心を重心と呼ぶ．以下では “重心” を用いる．

(2) 偶　力

剛体に作用する 2 つの力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ が，大きさは同じで向きは反対向きであるが，作用線が同一直線でない場合を考えよう．力の和は

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0 \qquad (2\cdot 60)$$

であるが，力のモーメントの和は

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \neq 0 \qquad (2\cdot 61)$$

である．この場合には一つの力には置き換えることはできない．このような対の力を偶力といい，式 (2･61) を偶力のモーメントという．偶力のモーメントは原点の取り方に依存せず，その大きさは，力の作用線の間の距離を h とすると hF_1 (= hF_2) に等しい．

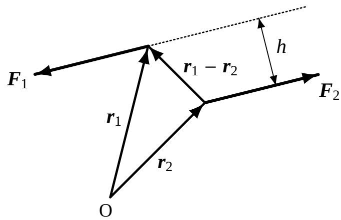


図 2･7　偶　力

2-6-3 剛体の釣り合い

剛体が釣り合いの状態にあるとき，運動量も角運動量も 0 であるから，剛体に作用する外力について次の関係式が成り立つ．

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0 \quad \text{および} \quad \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0 \qquad (2\cdot 62)$$

つまり，外力の総和と外力のモーメントの総和が共に 0 であることが釣り合いの条件である．なお，力のモーメントはどの点の周りに考えてよい．なぜなら力の総和が 0 であるので，以下の式に示すように，力のモーメントの総和は任意の点 P の周りの力のモーメントの総和に

等しいからである．

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_{\mathbf{P}} + \boldsymbol{r}_i') \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_{\mathbf{P}} \times \left(\sum_i \boldsymbol{F}_i \right) + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i \tag{2・63}$$

ここでは，$\boldsymbol{r}_i'$ は点 P から見た力 $\boldsymbol{F}_i$ の作用点の位置ベクトルである（**図 2･8** 参照）．

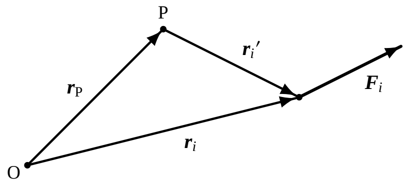


図 2･8　点 P に相対的な位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i'$

2-6-4 て　こ

定点（支点）を通る固定軸の周りに自由に回転できる棒で，支点から遠い点に小さな力を加えて，支点の反対側，支点に近い点に大きな力を得る道具をてこという．**図 2･9** のように，棒の片方の端 A に荷重 F_{A} を加えるとき，他方の端 B に力 F_{B} を加えると釣り合いの状態になるとする．棒を剛体と考え，棒が支点 C から受ける力を F_{C} とする．棒の質量は無視し，棒は水平であるとして，鉛直方向の力の釣り合いの式を書くと

$$F_{\mathrm{C}} - F_{\mathrm{A}} - F_{\mathrm{B}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad F_{\mathrm{C}} = F_{\mathrm{A}} + F_{\mathrm{B}} \tag{2・64}$$

である．力のモーメントはどの点の周りに考えてもよく，ここでは支点 C の周りの力のモーメントの釣り合いの式を書くと（反時計回りの回転を引き起こす，紙面の裏から表への向きの力のモーメントを正として）

$$r_{\mathrm{A}} F_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} F_{\mathrm{B}} = 0 \tag{2・65}$$

である．r_{A}，r_{B} は支点から A 端，B 端までの長さである．これより次の関係を得る．

$$F_{\mathrm{B}} = \frac{r_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{B}}} F_{\mathrm{A}} \tag{2・66}$$

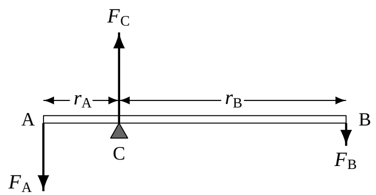


図 2･9　てこの原理

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-7 固定軸の周りの剛体の回転

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

剛体が固定軸の周りに回転する場合を考えて，角運動量の時間変化の式を具体的に展開しよう．

2-7-1 剛体の角運動量

固定軸の周りに回転している剛体を考えよう．この場合には固定軸周りの回転角を指定するだけで剛体のすべての点の位置は決定されるので，運動の自由度は 1 である．運動は，角運動量の固定軸（z 軸にとる）方向の成分（固定軸の周りの角運動量） L_z についての方程式

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = N_z \quad \text{ただし} \quad N_z = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i)_z \tag{2・67}$$

によって記述される．z 軸の周りの回転を引き起こすのは，剛体に作用する力のモーメントの z 成分 N_z であることに注意しよう．

固定軸の周りの剛体の角速度を ω とするとき，角運動量の z 成分 L_z の表式を求めよう．剛体を微小部分に分け，i 番目の微小部分の質量を m_i，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$，z 軸と $\boldsymbol{r}_i$ とのなす角度を ϕ_i とする（**図 2・10** 参照）．この微小部分は半径 $s_i = r_i \sin\phi_i$ の円周上を速さ $v_i = s_i\omega$ で運動している．角運動量 $m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v_i}$ の z 成分は $(m_i r_i v_i)\sin\phi_i = m_i {s_i}^2\omega$ と表される．すべての微小部分について加え合わせて

$$L_z = \sum_i m_i {s_i}^2 \omega \equiv I\omega \tag{2・68}$$

を得る．ここで

$$I = \sum_i m_i {s_i}^2 \tag{2・69}$$

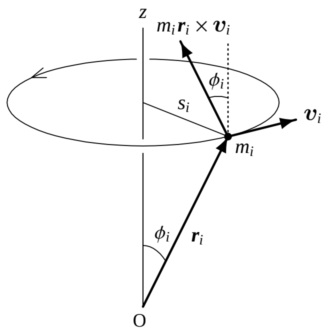


図 2･10　剛体の微小部分の角運動量

は，回転軸と剛体の質量分布のみによって決定される量であり，慣性モーメントという．実際には質量は連続的に分布しているので，和を積分に置き換えて

$$I = \int s^2 \rho \, \mathrm{d}V \tag{2・70}$$

である．ただし s は回転軸までの距離，ρ は密度，$\mathrm{d}V$ は微小体積要素で，積分の範囲は密度が 0 でない全領域である．密度が一定の場合には次式となる．

$$I = \rho \int s^2 \, \mathrm{d}V \tag{2・71}$$

慣性モーメントを使うと，固定軸の周りの剛体の回転運動を記述する方程式 (2･67) は

$$I \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N_z \tag{2・72}$$

となる．

2-7-2 回転運動のエネルギー

固定軸の周りに回転している剛体の微小部分の運動エネルギー $m_i v_i{}^2/2$ をすべての微小部分について加えあわせると，回転している剛体の運動エネルギーが求まる．$v_i = s_i\omega$ に注意すると，運動エネルギー T は慣性モーメント I を使って次式で表される．

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i{}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i s_i{}^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{2・73}$$

2-7-3 回転運動と直線運動

固定軸周りの剛体の回転と質点の直線運動の間には**表 2･1** に示すような明瞭な対応関係がある．回転運動における慣性モーメントは，直線運動における質量の役割を果たす重要な量である．ただし，慣性モーメントは，質量のように物体に固有な量ではなく，回転軸が物体のどこを，どの向きに貫くかに依存する．

表 2･1　固定軸周りの剛体の回転運動と質点の直線運動の対応

直線運動		回転運動	
質量	m	**慣性モーメント**	I
速度	v	**角速度**	ω
運動量	mv	**角運動量**	$I\omega$
運動方程式	$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$	**運動方程式**	$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N$
運動エネルギー	$\frac{1}{2}mv^2$	**運動エネルギー**	$\frac{1}{2}I\omega^2$

ただし，F は運動方向の力，N は回転軸の周りの力のモーメント

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-8 慣性モーメント

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

慣性モーメントに関する幾つかの定理を述べ，代表的な剛体の慣性モーメントを求める．

2-8-1 回転半径

慣性モーメント I は ML^2 の次元を持つので，長さの次元を持つ量 k を使って

$$I = Mk^2 \tag{2・74}$$

と書くことができる．ただし，M は剛体の質量である．k を回転半径という．

2-8-2 慣性モーメントに関する定理

（1）定理 1

質量 M の剛体の任意の軸の周りの慣性モーメントを I，重心を通りこの軸に平行な軸の周りの慣性モーメントを I_G，2 つの平行な軸の間の距離を d とするとき，次の関係が成り立つ．

$$I = I_\mathrm{G} + Md^2 \tag{2・75}$$

[証明]

重心を通る軸を z 軸に選び，任意の軸と x-y 面の交点を $(x_\mathrm{O}, y_\mathrm{O})$ とする（**図 2・11** 参照）．各軸の周りの慣性モーメントは，剛体を微小部分に分けて

$$I_\mathrm{G} = \sum_i m_i(x_i{}^2 + y_i{}^2) \tag{2・76}$$

$$I = \sum_i m_i\{(x_i - x_\mathrm{O})^2 + (y_i - y_\mathrm{O})^2\} \tag{2・77}$$

と表される．式 (2・77) は

$$I = \sum_i (x_i{}^2 + y_i{}^2) - 2\left(\sum_i m_i x_i\right)x_\mathrm{O} - 2\left(\sum_i m_i y_i\right)y_\mathrm{O} + \left(\sum_i m_i\right)(x_\mathrm{O}{}^2 + y_\mathrm{O}{}^2) \tag{2・78}$$

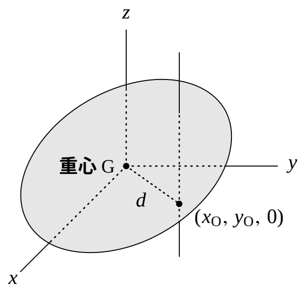


図 2・11　平行軸の周りの慣性モーメント

となる．右辺の第 1 項は I_G に等しい．重心の x 座標と y 座標は 0 なので $\sum m_i x_i = 0$, $\sum m_i y_i = 0$ であり，右辺の第 2 項と第 3 項は 0 である．最後の項において $\sum_i m_i = M$, ${x_O}^2 + {y_O}^2 = d^2$ であるから次の結果を得る．

$$I = I_G + M({x_O}^2 + {y_O}^2) = I_G + Md^2 \tag{2・79}$$

(2) 定理 2

薄い平板上の剛体の任意の点 O を通り，板に垂直な軸の周りの慣性モーメントを I_z，点 O を通り板の面内の互いに直交する 2 軸の周りの慣性モーメントを I_x，I_y とすると，I_z，I_x，I_y の間には次の関係が成り立つ．

$$I_z = I_x + I_y \tag{2・80}$$

[証明]

図 2･12 を見れば明らかなように

$$I_x = \sum_i m_i {y_i}^2, \quad I_y = \sum_i m_i {x_i}^2, \quad I_z = \sum_i m_i({x_i}^2 + {y_i}^2) \tag{2・81}$$

であるので $I_z = I_x + I_y$ が成り立つ．

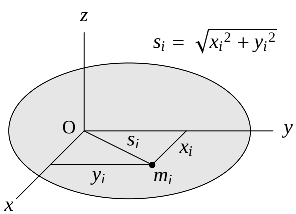


図 2･12　薄い平板の慣性モーメント

2-8-3 慣性モーメントの例

密度が一様で対称軸を持つ幾つかの剛体の，対称軸の周りの慣性モーメントを求めよう．対称軸は重心を通るので，対称軸に平行な軸の周りの慣性モーメントは定理 1 を使って簡単に求めることができる．以下，剛体の質量を M とする．

(1) 細い円輪

半径 a の細い円形の輪（リング）の，中心（重心）を通り輪の面に垂直な軸の周りの慣性モーメント

剛体のすべての部分が軸から距離 a にあるから（**図 2･13** 参照），慣性モーメントは次式で与えられる．

$$I = Ma^2 \tag{2・82}$$

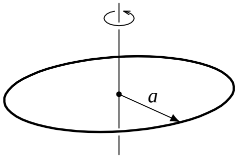


図 2･13　細い円輪の慣性モーメント

(2) 細い棒

長さ l の細い棒の，中心（重心）を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント

棒に沿って x をとり，棒の中心を $x = 0$ とする（**図 2･14** (a) 参照）．線密度 $\sigma = M/l$ を使うと，微小部分 dx (質量 σdx) の慣性モーメントは $x^2(\sigma \mathrm{d}x)$ である．全長にわたって積分して次の結果を得る．

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \sigma\, \mathrm{d}x = \sigma \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}\sigma l^3 = \frac{1}{12} M l^2 \tag{2･83}$$

質量 M，一辺の長さ l の長方形の薄い平板の，中心を通り他方の辺に平行な軸の周りの慣性モーメントも同じ式 $Ml^2/12$ で与えられる．なぜなら，板を図 2･14 (b) のように長さ l の細い棒に分けると，i 番目（質量 m_i）の慣性モーメントは $m_i l^2/12$ である．総和を取ると $\sum_i m_i = M$ であるから $Ml^2/12$ を得る．

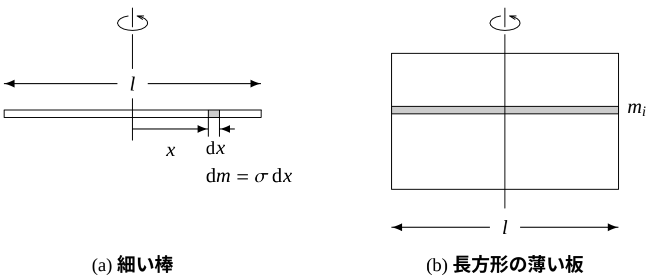


図 2･14　細い棒の慣性モーメント

(3) 長方形の平板

辺の長さ a，b の長方形の薄い平板の，中心（重心）を通り板に垂直な軸の周りの慣性モーメント

長方形の中心を通り，辺 a に平行な軸の周りの慣性モーメントは $I_x = Mb^2/12$，辺 b に平行な軸の周りの慣性モーメントは $I_y = Ma^2/12$ であるので，求める慣性モーメントは定理 2 を使って次の結果を得る．

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \tag{2･84}$$

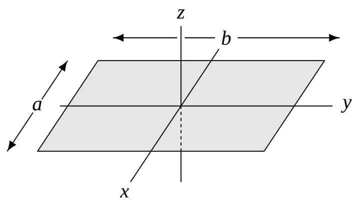


図 2･15　長方形平板の慣性モーメント

(4) 円形の平板

半径 a の円形の薄い平板の，中心（重心）を通り板に垂直な軸の周りの慣性モーメント

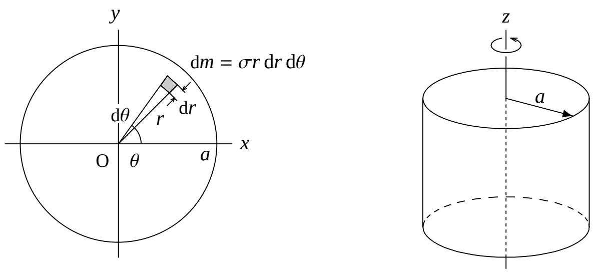
中心を原点とする極座標を用いて計算する（**図 2･16**(a) 参照）．面密度 $\sigma = M/\pi a^2$ を使って，微小部分（面積 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$）の質量は $\mathrm{d}m = \sigma r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，慣性モーメントは $\mathrm{d}I = r^2\,\mathrm{d}m$ であるから，積分して次の結果を得る．

$$I_z = \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^2\,\sigma r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi\sigma a^4 = \frac{1}{2}Ma^2 \tag{2･85}$$

この結果は円板の厚さに関係しない（この場合には σ は円板の単位面積当たりの質量）．したがって，半径 a の直円柱の，回転対称軸の周りの慣性モーメントも式 (2･85) で与えられる．

なお，薄い円板の中心を通り円板内にある軸の周りの慣性モーメントに関しては，対称性から $I_x = I_y$ であるので，定理 2 の関係 $I_x + I_y = I_z$ を使って次の結果を得る．

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}Ma^2 \tag{2･86}$$



(a) **薄い円板**　　(b) **直円柱**

図 2･16　円板の慣性モーメント

(5) 球

半径 a の球の，中心（重心）を通る軸の周りの慣性モーメント

球の密度を ρ とする（$M = 4\pi a^3\rho/3$）．回転軸を z 軸とし，**図 2･17** のように z 軸に垂直な薄い円板に分ける．中心から $z \sim z + \mathrm{d}z$ の薄い円板の半径は $r = \sqrt{a^2 - z^2}$，質量は $\rho\pi r^2\,\mathrm{d}z$ であるから，その慣性モーメント $\mathrm{d}I$ は

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{2}(\rho\pi r^2 \mathrm{dz})\, r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi(a^2 - z^2)^2\, \mathrm{dz} \tag{2・87}$$

である．積分して次の結果を得る．

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-a}^{a} (a^2 - z^2)^2\, \mathrm{dz} = \frac{8}{15}\rho\pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2 \tag{2・88}$$

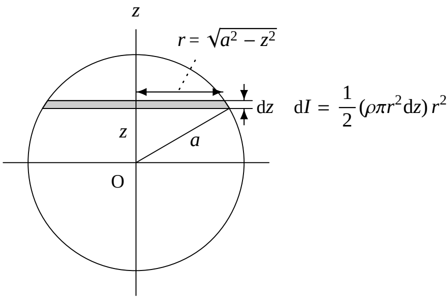


図 2･17　球の慣性モーメント

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-9 実体振り子

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

固定軸の周りの剛体の運動の一例として，水平な固定軸の周りに自由に回転できる剛体が，重力を受けて微小振動する場合を取り上げよう．このような剛体の振り子を実体振り子（または剛体振り子）という．

2-9-1 実体振り子の運動方程式

剛体の重心から固定軸に下ろした垂線の長さを h，この垂線と鉛直線のなす角度を θ とする．固定軸周りの剛体の慣性モーメントを I とすると，運動方程式 (2･72) は

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -Mgh\sin\theta \tag{2･89}$$

と書ける．ここで，右辺は固定軸の周りの重力のモーメントである．なお，剛体は固定軸からも力を受けるが，その力のモーメントは 0 であるので，運動には関係しない．微小振動を考えて $\theta \ll 1$ とすると $\sin\theta \approx \theta$ と近似できるから運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Mgh}{I}\theta \tag{2･90}$$

となる．この式は単振動の方程式と同じ形をしており，その解は

$$\theta(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{2･91}$$

である．ただし

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}} \tag{2･92}$$

は振動の角振動数である．また，振幅 A と初期位相 α は初期条件から決まる定数である．振動の周期は次の式で与えられる．

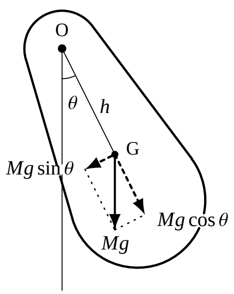


図 2･18　実体振り子．O : **支点 (回転軸)，** G : **重心**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \tag{2・93}$$

2-9-2 相当単振り子の長さ

長さ l の単振り子の周期は $2\pi\sqrt{l/g}$ であるから，実体振り子と同じ周期で振動する単振り子の長さ l_e は

$$l_\mathrm{e} = \frac{I}{Mh} \tag{2・94}$$

である．この l_e を相当単振り子の長さという．重心を通り回転軸に平行な軸の周りの慣性モーメントを I_G とすると

$$I = I_\mathrm{G} + Mh^2 \tag{2・95}$$

であるから，次の関係が成り立つ．

$$l_\mathrm{e} = \frac{I_\mathrm{G}}{Mh} + h \quad \text{または} \quad h^2 - l_\mathrm{e}h + \frac{I_\mathrm{G}}{M} = 0 \tag{2・96}$$

最小の周期を与える h と最小の周期 T_min は

$$h = k_\mathrm{G}, \quad T_\mathrm{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2k_\mathrm{G}}{g}} \quad \text{ただし} \quad k_\mathrm{G} = \sqrt{\frac{I_\mathrm{G}}{M}} \tag{2・97}$$

である．k_G は重心を通る軸の周りの回転半径である．式 (2・96) は h に関して 2 次方程式であるので，最小値より長い周期を与える h は 2 つある．一方は $h < k_\mathrm{G}$，他方は $h > k_\mathrm{G}$ である（もし点 O が剛体を外れた場合には，質量の無視できる棒で剛体と固定軸をつなぐと考えよ）．

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-10 剛体の平面運動

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

剛体のどの点をとってもその点が一平面内で運動する場合に平面運動という．前節の実体振り子の運動も，どの点も固定軸に垂直な平面内で運動しているから平面運動である．

2-10-1 平面運動の運動方程式

剛体の平面運動は，重心の並進運動と重心周りの回転運動に分けて記述できる．剛体の重心の速度を $\boldsymbol{v}$，重心まわりの角速度を ω とすると，並進運動と回転運動の方程式は

$$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{2·98}$$

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N \tag{2·99}$$

である．ただし，$\boldsymbol{F}$ は剛体に作用する外力（の総和），N は重心の周りの外力のモーメント（の総和）である．$\boldsymbol{F}$ は平面内のベクトル，N は平面に垂直な成分である．

2-10-2 斜面を転がる回転体

斜面を滑りなく転がる回転体（球，円柱など）を考えよう．斜面が水平のなす角度を ϕ，回転体の質量を M，半径を a，重心周りの慣性モーメントを I とする．回転体に作用する力は重力 Mg，斜面から受ける垂直抗力 $Mg\cos\phi$，斜面に沿って作用する摩擦力（滑りはないので静止摩擦力）F である（**図 2·19** 参照）．重心の周りの力のモーメントを与えるのは摩擦力だけである．斜面を転がり下りる場合には摩擦力の方向は斜面に沿って上向きである．斜面に沿って下向き方向の剛体の重心速度を v，重心周りの角速度を ω とすると，回転体の運動方程式は

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mg\sin\phi - F \tag{2·100}$$

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = aF \tag{2·101}$$

と表せる． 滑らずに転がっている場合には次の関係式が成り立つ．

$$v = a\omega \tag{2·102}$$

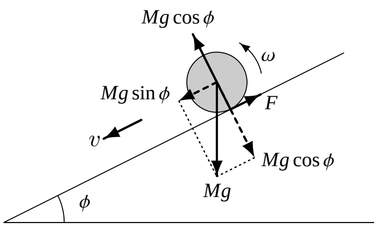


図 2·19　斜面を転がる回転体

式 (2･101)，式 (2･102) より

$$F = \frac{I}{a}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{a^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2･103}$$

この関係を式 (2･100) に代入して

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mg\sin\phi - \frac{I}{a^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{2･104}$$

以上から次の結果を得る．

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g\sin\phi}{1 + I/Ma^2} \tag{2･105}$$

球の場合には $I = 2Ma^2/5$，円柱または円板の場合には $I = Ma^2/2$ であるので，重心の加速度はそれぞれ $(5/7)g\sin\phi$，$(2/3)g\sin\phi$ となる．重心の加速度は M，a には関係しない．

2-10-3 滑りのない条件

加速度の式 (2･105) を式 (2･103) に代入して

$$F = \frac{I}{a^2}\frac{g\sin\phi}{1 + I/Ma^2} = \frac{Mg\sin\phi}{1 + Ma^2/I} \tag{2･106}$$

を得る．垂直抗力は $Mg\cos\phi$ であるから，静止摩擦係数を μ とすると静止摩擦力は次の条件を満たさなければならない．

$$F \leqq \mu Mg\cos\phi \tag{2･107}$$

すなわち，滑りなく転がるためには，斜面の傾き角は次の条件式を満たさなければならない．

$$\tan\phi \leqq \mu\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) \tag{2･108}$$

球の場合には $\tan\phi \leqq 7\mu/2$，円柱の場合には $\tan\phi \leqq 3\mu$ である．斜面の上に置いた物体が滑らずに静止している条件が $\tan\phi \leqq \mu$ であることを考えると，通常の傾きの斜面では滑りなく転がることがわかる*．

なお，滑りが生じる場合には式 (2･102) は成り立たない．この場合には動摩擦係数 μ' を用いて摩擦力は $F = \mu' Mg\cos\phi$ と表され，並進運動と回転運動はそれぞれ独立に解を求めることができる．

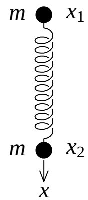
* 仮に $\mu = 0.5$ とすると $\tan^{-1}\mu \approx 26.6°$，$\tan^{-1} 7\mu/2 \approx 60.3°$，$\tan^{-1} 3\mu \approx 56.3°$ である．

■12 群 - 4 編 - 2 章

2-11 演習問題

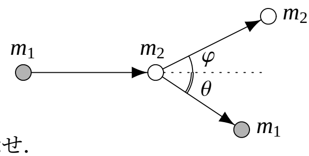
（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

1. 質量 m の 2 つの質点を自然長 l_0，バネ定数 c のバネの両端につなぎ，一方の質点を手で支え，他方の質点を釣り合いの位置に静止させる．支えていた質点を静かに放した後の 2 つの質点の運動を求めよ．ただし，運動は鉛直線（x 軸，下方を $x > 0$ とする）からはずれないものとし，時刻 t における 2 つの質点の位置を $x_1(t), x_2(t)$ とする．手を放した瞬間を $t = 0$ とし，$x_1(0) = 0$ とする．



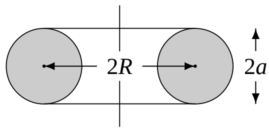
2. 質量 m_1 の滑らかな球が，静止している質量 m_2 の滑らかな球に衝突し，速度の方向が衝突前の方向から θ だけ変わり，質量 m_2 の球は角度 φ の方向に動きだした（図参照）．完全弾性衝突であるとして次式を照明せよ．

$$\tan\theta = \frac{m_2 \sin 2\varphi}{m_1 - m_2 \cos 2\varphi}$$

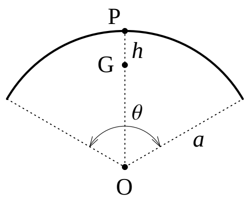


$m_1 = m_2$ の場合には $\theta + \varphi = \pi/2$ であることを示せ．

3. 次の剛体の指定された回転軸の周りの慣性モーメントを求めよ．
剛体の質量は M とする．
   (1) 底面の半径 a, 高さ h の円柱．重心を通り円柱の対称軸に垂直な回転軸．
   (2) 一辺 a の正三角形の板．重心を通り面に垂直な回転軸．
   (3) 半径 a の一様な球殻（表面にのみ質量が分布している球）．中心を通る回転軸．
   (4) 外半径 a_1, 内半径 a_2 の薄いリング状円板．中心を通り面に垂直な回転軸．
   (5) 回転対称軸を含む平面による断面が図のようなドーナツ状円環，回転軸は回転対称軸．

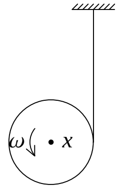


4. 半径 a の細いリングの一部を切り出した右図のような円弧状の針金がある．針金の質量は M, 円弧の中心 O から見た角度は θ である．針金の重心 G と 2 等分点 P の間の距離を h，O, G, P を通り, 紙面に垂直な軸の周りの針金の慣性モーメントをそれぞれ I_O, I_G, I_P とする．I_O，I_G，I_P の関係から I_P を M，a，h で表せ．P 点を支点として針金を鉛直面内で微小振動させるときの周期 T を求めよ（T を求めるのに h を求める必要はないはず）．

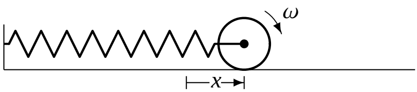


5. ボーリングのボールが，はじめ回転なしに速さ v_0 で水平な面上を滑り始めた．滑りがあるときには摩擦力が作用する．ボールは最終的には滑りなく転がるようになる．このときのボールの重心の移動速度を求めよ．ボーリングのボールは完全な球形として，質量 M，半径 a とする．

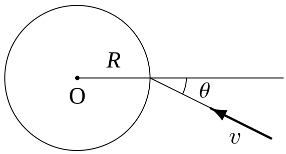
6. 水平な床の上に垂直に立っている長さ $2l$ の真っ直ぐな棒が静かに倒れ始めた．棒が鉛直方向と角度 θ をなすときの棒の回転の角速度 ω を次の 2 つの場合に求めよ．
   (1) 床が滑らかな場合．
   (2) 棒の下端の位置は固定されているが自由に回転できる場合．
7. 質量 M，半径 a の一様な円板の周囲に軽い糸を巻きつけ，糸の一端を固定して円板を落下させる（右図参照）．円板が落下する加速度と糸の張力を求めよ．重力加速度を g とする．



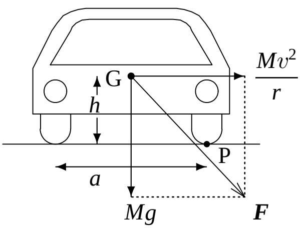
8. 中心軸の回りに自由に回転できる一様な円板と軽いバネを図のように連結した．円板は水平な床の上を滑ることなく転がる．円板の中心が行う振動の角振動数 ν を求めよ．バネ定数 k，円板の半径 a，質量 M とせよ．



9. 鉛直軸の周りに摩擦なく回転する一様な円板（半径 R, 質量 M）がある．図の方向から速度 v で走ってきた人（質量 m）が静止していた円板の縁に跳び乗った．
   (1) 円板が回りだす角速度 ω_1 を求めよ．
   (2) この人が中心 O から $R/2$ のところまで歩いてきたとき，円板の角速度は ω_2 となった．ω_2/ω_1 を求めよ．



10. 自動車がカーブを走行するとき，速度がある限界を超すと横滑りまたは横転する．路面が水平であるとして，横滑りを生じないための速度の条件，横転しないための速度の条件を求めよ．ただし，路面から車の重心までの高さを h，左右の車輪の間隔を a とする（図参照）．車の重心速度 v，重心が描く曲率半径 r, 路面とタイヤとの間の静摩擦係数 μ，重力加速度 g とする．また，横滑りするより前に横転する条件を求めよ．なお，重心の位置は変わらないとし，ブレーキはすべての車輪に同様にかかるとする．



解答

1. 運動方程式 $m\ddot{x}_1 = mg + c(x_2 - x_1 - l_0)$，$m\ddot{x}_2 = mg - c(x_2 - x_1 - l_0)$.
   $X = x_1 + x_2, Y = x_2 - x_1 - l$ を導入すると $m\ddot{X} = 2mg$，$m\ddot{Y} = -2cY$,
   $X = gt^2 + \left(l + \dfrac{mg}{c}\right)$，$Y = \dfrac{mg}{c}\cos\left(\sqrt{\dfrac{2c}{m}}T\right)$,
   $x_1 = \dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{mg}{2c}\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\dfrac{2c}{m}}t\right)\right\}$，$x_2 = \dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{mg}{2c}\left\{1 + \cos\left(\sqrt{\dfrac{2c}{m}}t\right)\right\} + l$
2. 運動量保存則：$m_1v_1 = m_1v'_1\cos\theta - m_2v'_2\cos\varphi$，$m_1v'_1\sin\theta = m_2v'_2\sin\varphi$,
   エネルギー保存則：$m_1{v_1}^2/2 = m_1{v'_1}^2/2 + m_2{v'_2}^2/2$ 以上から $v'_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1\cos\varphi$,
   これを $\tan\theta = \dfrac{m_2v'_2\sin\varphi}{m_1v_1 - m_2v'_2\cos\varphi}$ に代入すればよい.
   $m_1 = m_2$ の場合には $\tan\theta = 1/\tan(\varphi)$ となるので $\theta = \pi/2 - \varphi$ である.
3. (1) $\dfrac{1}{4}Ma^2 + \dfrac{1}{12}Mh^2$ (2) $\dfrac{1}{12}Ma^2$ (3) $\dfrac{2}{3}Ma^2$ (4) $\dfrac{1}{2}M({a_1}^2 + {a_2}^2)$ (5) $MR^2 + \dfrac{3}{4}Ma^2$
4. $I_{\mathrm{O}} = Ma^2$ 及び $I_{\mathrm{O}} = I_{\mathrm{G}} + M(a-h)^2$，$I_{\mathrm{P}} = I_{\mathrm{G}} + Mh^2$ より $I_{\mathrm{P}} = 2Mah$,
   周期 $T = 2\pi\sqrt{2a/g}$
5. 動摩擦力を F とすると運動方程式 $M\dot{v} = -F$，$I_0\dot{\omega} = Fa$（ただし $I_0 = 2Ma^2/5$）より $v = v_0 - 2a\omega/5$ の関係がある．滑りがなくなるとき $v = a\omega$，$v = 5v_0/7$
6. (1) 床が滑らかな場合には水平方向の外力はないから，重心は鉛直線上を運動する．重心の高さを y とすると $y = l\cos\theta$，重心速度 $v = \dot{y} = -l\omega\sin\theta$，力学的エネルギー保存則 $mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = l(1-\cos\theta)mg$（ただし $I_0 = ml^2/3$）より $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{l}\dfrac{1-\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}}$
   (2) 下端の周りの回転運動である．力学的エネルギー保存則 $I\omega^2/2 = l(1-\cos\theta)mg$（ただし $I = 4ml^2/3$）より $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}(1-\cos\theta)}$
7. 運動方程式 $M\ddot{x} = Mg - T$，$I\dot{\omega} = aT$（T は糸の張力），慣性モーメント $I = Ma^2/2$, 滑りのない条件 $\dot{x} = a\omega$ の関係を使って $\ddot{x} = 2g/3$，$T = Mg/3$
8. 運動方程式は $\dot{x} > 0$ のとき $M\ddot{x} = -kx - F, I\dot{\omega} = Fa$，$\dot{x} < 0$ のとき $M\ddot{x} = -kx + F$, $I\dot{\omega} = -Fa$，F を消去するといずれの場合も $M\ddot{x} = -kx - (Ma/2)\dot{\omega}$，滑りのない条件 $\dot{x} = a\omega$ を使って $(3M/2)\ddot{x} = -kx$，角振動数 $\nu = \sqrt{2k/3M}$
9. 角運動量保存則 $mvR\sin\theta = \left(\dfrac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_1$ より $\omega_1 = \dfrac{2m}{M+2m}\dfrac{v}{R}\sin\theta$,
   $\left(\dfrac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_1 = \left\{\dfrac{1}{2}MR^2 + m\left(\dfrac{R}{2}\right)^2\right\}\omega_2$ より $\omega_2 = \dfrac{2(M+2m)}{2M+m}\omega_1 = \dfrac{4m}{2M+m}\dfrac{v}{R}\sin\theta$
10. 車に固定した回転座標系で考える．重心に水平方向の遠心力 $\dfrac{Mv^2}{r}$, 鉛直下方の重力 Mg が作用する．力の釣り合いの条件 $R_1 + R_2 = Mg, F_1 + F_2 = Mv^2/r$，重心の周りの力のモーメントの釣り合いの条件 $h(F_1 + F_2) = (a/2)(R_2 - R_1)$ から

$$R_1 = \left(\frac{g}{2} - \frac{hv^2}{ar}\right)M, \qquad R_2 = \left(\frac{g}{2} + \frac{hv^2}{ar}\right)M$$

横滑りしない条件 $F_1 + F_2 < \mu(R_1 + R_2)$，すなわち $v^2 < \mu gr$．横転しない条件 $R_1 > 0$, すなわち $v^2 < \dfrac{gar}{2h}$．横滑りする前に横転する条件は $\dfrac{a}{2h} < \mu$.